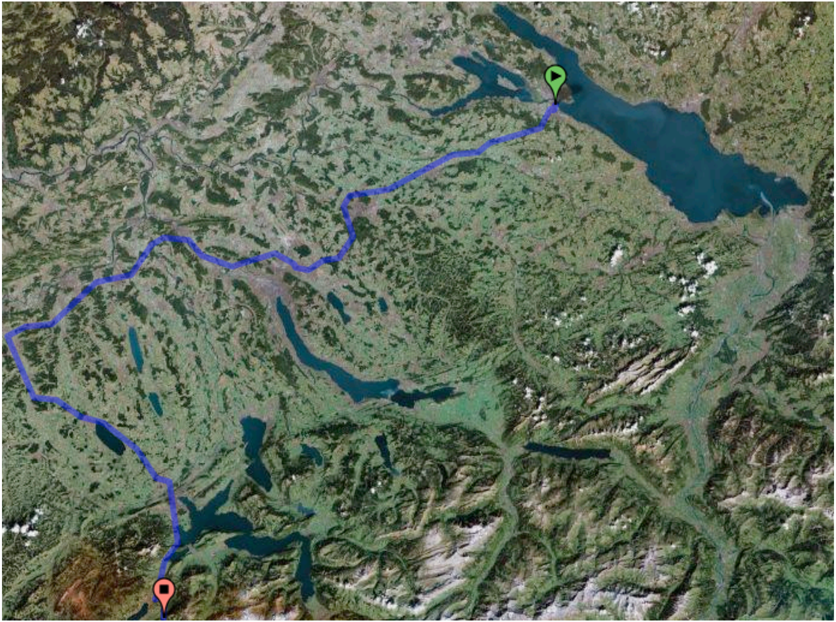
Reelle Algebra und nichtlineare Optimierung

Markus Schweighofer

Université de Rennes 1

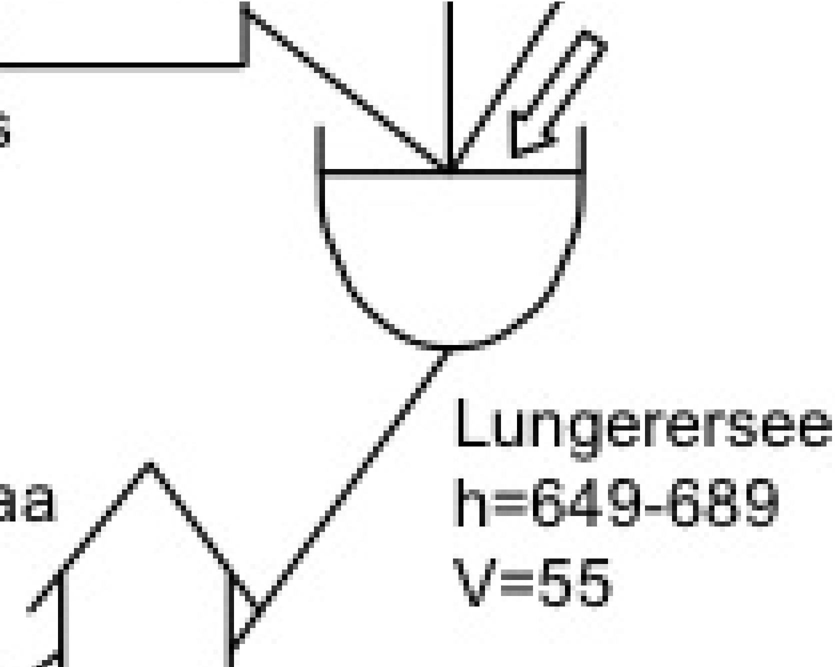
dies academicus
Universität Konstanz
26. Oktober 2007

Von Konstanz nach Obwalden

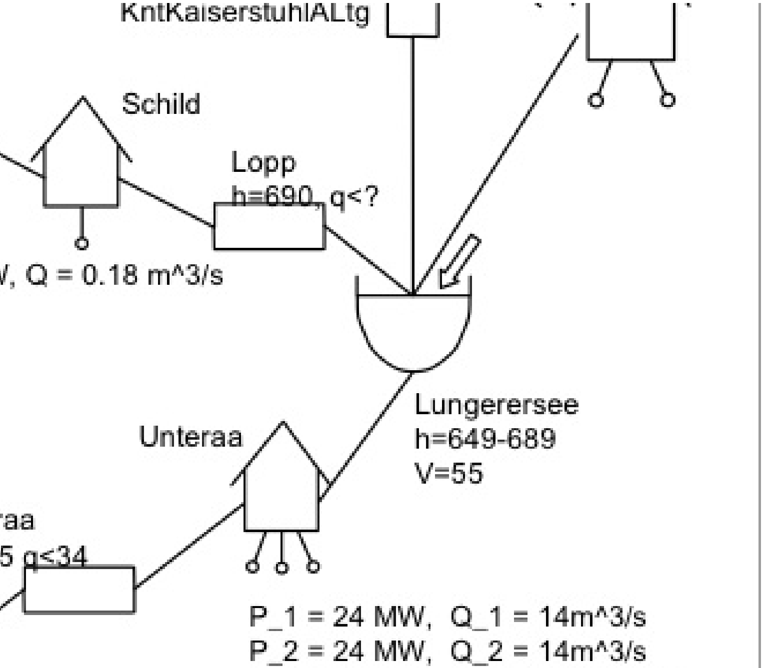


Lungerersee

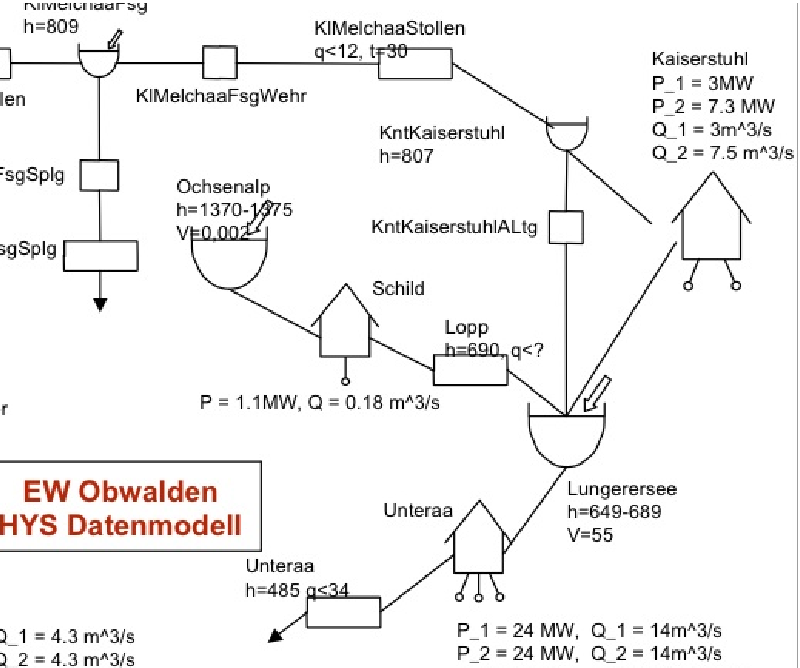
Elektrizitätswerk Obwalden



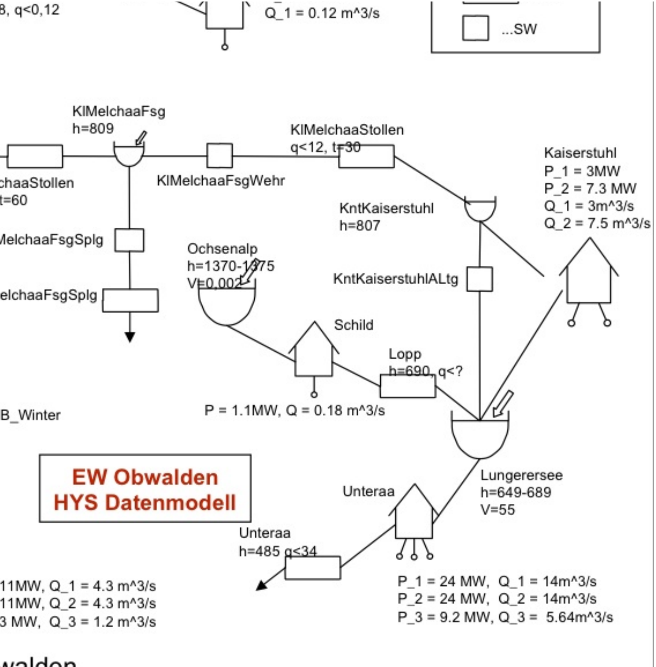
Elektrizitätswerk Obwalden



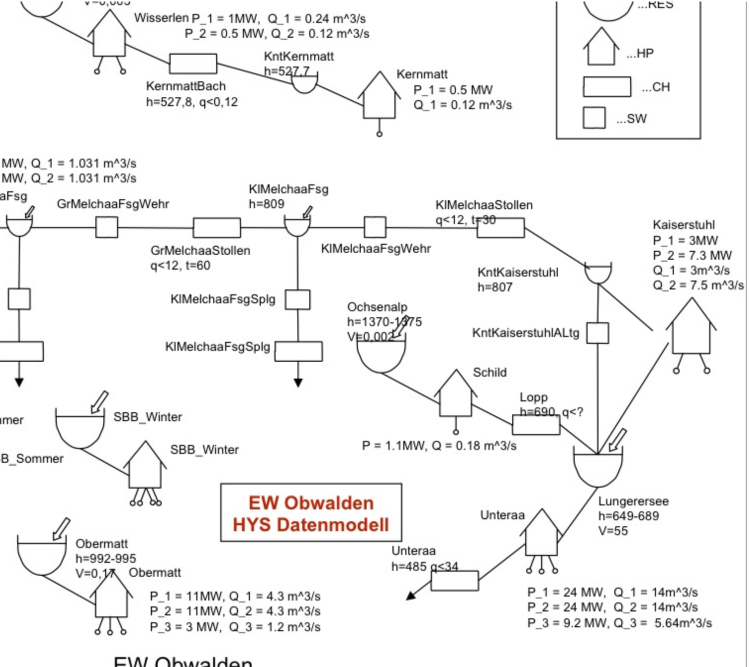
Elektrizitätswerk Obwalden



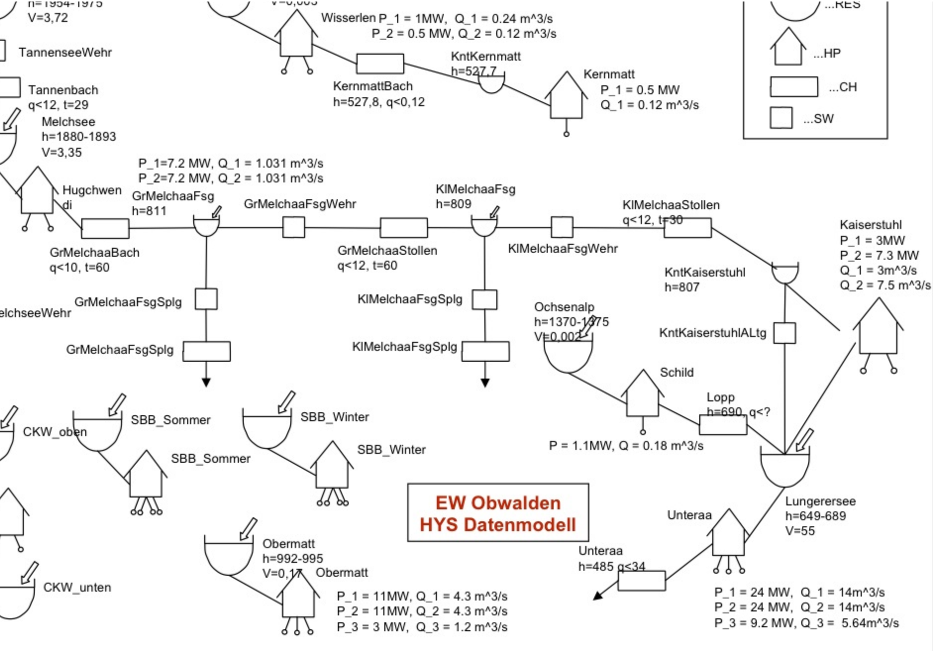
Elektrizitätswerk Obwalden



Elektrizitätswerk Obwalden

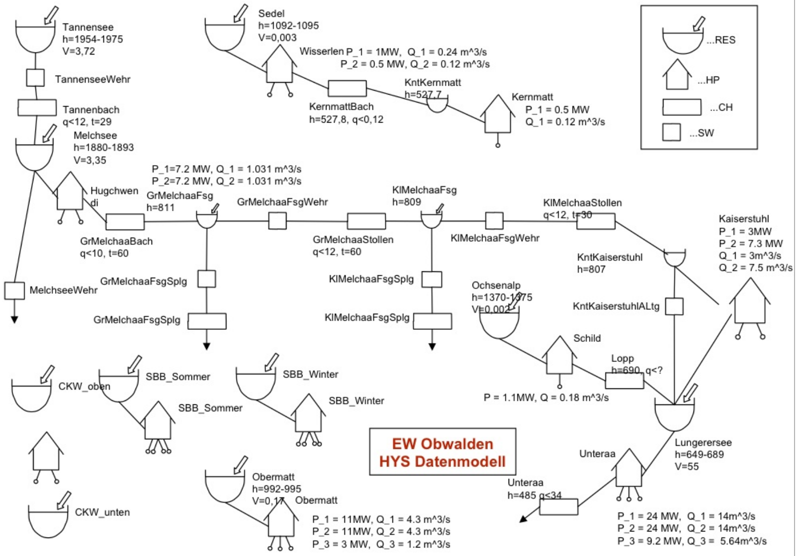


Elektrizitätswerk Obwalden



EW Obwalden

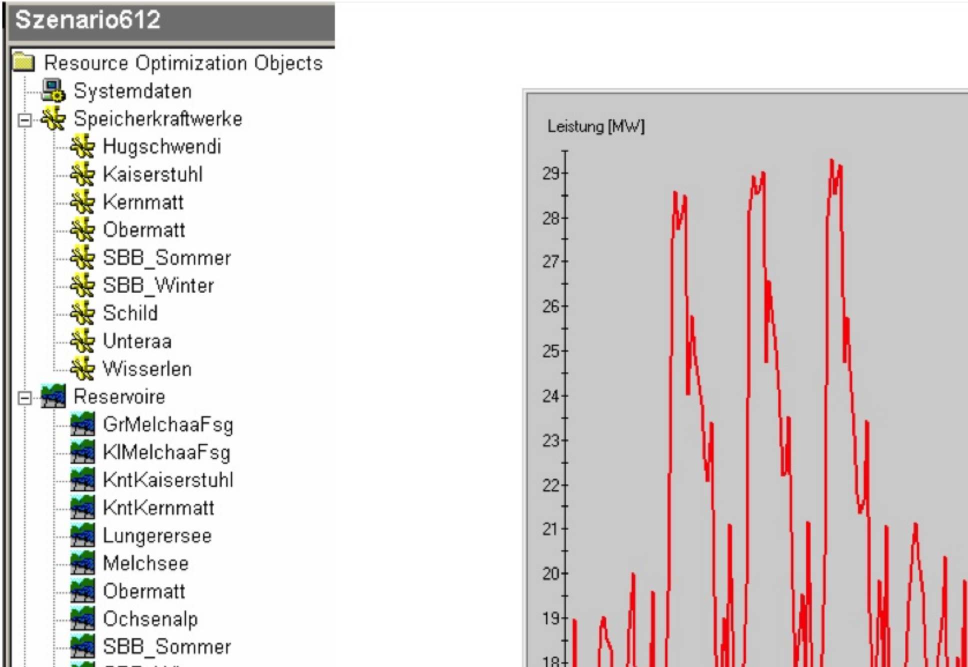
Elektrizitätswerk Obwalden



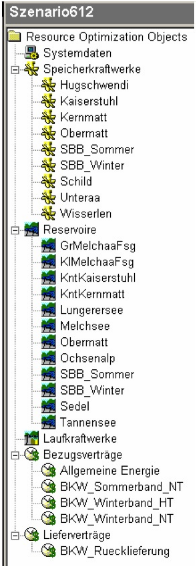
EW Obwalden
gerold.schaedler@ewonet.ch

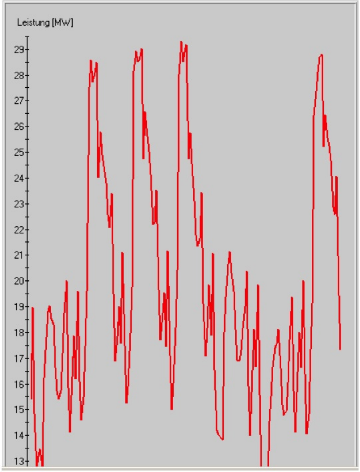
Elektrizitätswerk Obwalden

Elektrizitätswerk Obwalden



Elektrizitätswerk Obwalden





EW Obwalden
gerold.schaedler@ewonet.ch

Elektrizitätswerk Obwalden

p-2003 07:00	688.03	54.0091	0.0654	39.0105	C
p-2003 20:00	687.94	53.8219	0.1215	183.0714	C
p-2003 07:00	688.00	53.9612	0.1028	46.5502	C
p-2003 20:00	687.97	53.8827	0.1215	174.8605	C
p-2003 07:00	687.95	53.8511	0.1028	109.7479	C
p-2003 20:00	687.90	53.7480	0.1215	172.5507	C
p-2003 07:00	687.83	53.6157	0.1028	169.0090	C
p-2003 20:00	687.68	53.3086	0.1215	275.7085	C
p-2003 07:00	687.61	53.1743	0.1028	162.4450	C
p-2003 20:00	687.36	52.6600	0.1215	335.2589	C
p-2003 07:00	687.33	52.5921	0.1028	138.5803	C
p-2003 20:00	687.32	52.5774	0.1215	119.6002	C
p-2003 00:00	687.33	52.6047	0.0374	24.8722	C
p-2003 07:00	687.36	52.6529	0.0654	43.4482	C

Elektrizitätswerk Obwalden

00:00	23-Sep-2003 07:00	688.03	54.0091	0.0654	39.0105	0.0886	0.0000
07:00	23-Sep-2003 20:00	687.94	53.8219	0.1215	183.0714	0.4178	0.0000
20:00	24-Sep-2003 07:00	688.00	53.9612	0.1028	46.5502	0.1057	0.0000
07:00	24-Sep-2003 20:00	687.97	53.8827	0.1215	174.8605	0.3992	0.0000
20:00	25-Sep-2003 07:00	687.95	53.8511	0.1028	109.7479	0.2492	0.0000
07:00	25-Sep-2003 20:00	687.90	53.7480	0.1215	172.5507	0.3939	0.0000
20:00	26-Sep-2003 07:00	687.83	53.6157	0.1028	169.0090	0.3838	0.0000
07:00	26-Sep-2003 20:00	687.68	53.3086	0.1215	275.7085	0.6282	0.0000
20:00	27-Sep-2003 07:00	687.61	53.1743	0.1028	162.4450	0.3689	0.0000
07:00	27-Sep-2003 20:00	687.36	52.6600	0.1215	335.2589	0.7634	0.0000
20:00	28-Sep-2003 07:00	687.33	52.5921	0.1028	138.5803	0.3147	0.0000
07:00	28-Sep-2003 20:00	687.32	52.5774	0.1215	119.6002	0.2737	0.0000
20:00	29-Sep-2003 00:00	687.33	52.6047	0.0374	24.8722	0.0565	0.0000
00:00	29-Sep-2003 07:00	687.36	52.6529	0.0654	43.4482	0.0987	0.0000
07:00	29-Sep-2003 20:00	687.08	52.0876	0.1215	374.0912	0.8516	0.0000
20:00	30-Sep-2003 07:00	687.08	52.0927	0.1028	109.6070	0.2489	0.0000
07:00	30-Sep-2003 20:00	687.01	51.9544	0.1215	202.6870	0.4624	0.0000
20:00	01-Okt-2003 00:00	686.97	51.8762	0.0374	64.9341	0.1475	0.0000
00:00	01-Okt-2003 06:00	686.97	51.8776	0.0361	66.2407	0.1504	0.0000
06:00	01-Okt-2003 07:00	686.97	51.8809	0.0060	9.0077	0.0205	0.0000

Elektrizitätswerk Obwalden

Startdatum	Enddatum	Reservoir Pegel [msm]	Reservoir Inhalt [Mm3]	Zufluß [Mm3]	Erzeugte Energie [MWh]	Turbiniertes Volumen [Mm3]	Überlauf-Volumen [Mm3]	Hineingepumpte Energie [MWh]	Hineingepumptes Volumen [Mm3]	Herausgepumpte Energie [MWh]	Hera
23-Sep-2003 00:00	23-Sep-2003 07:00	688.03	54.0091	0.0654	39.0105	0.0886	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
23-Sep-2003 07:00	23-Sep-2003 20:00	687.94	53.8219	0.1215	183.0714	0.4178	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
23-Sep-2003 20:00	24-Sep-2003 07:00	688.00	53.9612	0.1028	46.5502	0.1057	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
24-Sep-2003 07:00	24-Sep-2003 20:00	687.97	53.8827	0.1215	174.8605	0.3992	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
24-Sep-2003 20:00	25-Sep-2003 07:00	687.95	53.8511	0.1028	109.7479	0.2492	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
25-Sep-2003 07:00	25-Sep-2003 20:00	687.90	53.7480	0.1215	172.5507	0.3939	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
25-Sep-2003 20:00	26-Sep-2003 07:00	687.83	53.6157	0.1028	169.0090	0.3838	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
26-Sep-2003 07:00	26-Sep-2003 20:00	687.68	53.3086	0.1215	275.7085	0.6282	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
26-Sep-2003 20:00	27-Sep-2003 07:00	687.61	53.1743	0.1028	162.4450	0.3689	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
27-Sep-2003 07:00	27-Sep-2003 20:00	687.36	52.6600	0.1215	335.2589	0.7634	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
27-Sep-2003 20:00	28-Sep-2003 07:00	687.33	52.5921	0.1028	138.5803	0.3147	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
28-Sep-2003 07:00	28-Sep-2003 20:00	687.32	52.5774	0.1215	119.6002	0.2737	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
28-Sep-2003 20:00	29-Sep-2003 00:00	687.33	52.6047	0.0374	24.8722	0.0565	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
29-Sep-2003 00:00	29-Sep-2003 07:00	687.36	52.6529	0.0654	43.4482	0.0987	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
29-Sep-2003 07:00	29-Sep-2003 20:00	687.08	52.0876	0.1215	374.0912	0.8516	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
29-Sep-2003 20:00	30-Sep-2003 07:00	687.08	52.0927	0.1028	109.6070	0.2489	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
30-Sep-2003 07:00	30-Sep-2003 20:00	687.01	51.9544	0.1215	202.6870	0.4624	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
30-Sep-2003 20:00	01-Okt-2003 00:00	686.97	51.8762	0.0374	64.9341	0.1475	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
01-Okt-2003 00:00	01-Okt-2003 06:00	686.97	51.8776	0.0361	66.2407	0.1504	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
01-Okt-2003 06:00	01-Okt-2003 07:00	686.97	51.8809	0.0060	9.0077	0.0205	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
01-Okt-2003 07:00	01-Okt-2003 20:00	686.81	51.5575	0.0783	287.8067	0.6557	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
01-Okt-2003 20:00	01-Okt-2003 22:00	686.82	51.5675	0.0120	16.5672	0.0376	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
01-Okt-2003 22:00	02-Okt-2003 06:00	686.91	51.7551	0.0482	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
02-Okt-2003 06:00	02-Okt-2003 07:00	686.91	51.7599	0.0060	8.3985	0.0191	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
02-Okt-2003 07:00	02-Okt-2003 20:00	686.73	51.4015	0.0783	305.7445	0.6964	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
02-Okt-2003 20:00	02-Okt-2003 22:00	686.74	51.4095	0.0120	17.4572	0.0396	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
02-Okt-2003 22:00	03-Okt-2003 06:00	686.83	51.5971	0.0482	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
03-Okt-2003 06:00	03-Okt-2003 07:00	686.83	51.6015	0.0060	8.5485	0.0194	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	

Elektrizitätswerk Obwalden

$$\mathrm{Preis}\Big|_{\mathrm{Jahr}} = \sum_{k=EW1}^{EWx} \sum_{\substack{M \in \\ \mathrm{Monate}}} \sum_{T=T_1}^{Tn} W_{M,\,T(k)} * \left(\mathrm{Preis}_W\right)_{T\,(}$$

$$\sum_{k=EW1}^{EWx} \Bigg(\max_{\substack{M \in \\ \mathrm{Monate}}} \bigcup_{i=1}^{\mathrm{Mon}|_d \cdot 96} \left\{ P_{M,i\,(k)} \right\} \Bigg) * \mathrm{Prei}$$

$$\sum_{k=EW1}^{EWx} VE_{(k)} * \mathrm{Preis}_{ABO\,(k)} +$$

$$\sum_{k=EW1}^{EWx} EE_{W\,(k)} * \mathrm{Preis}_{EE\,(k)} + \sum_{k=EW1}^{EWx} X_{DG\,(}$$

Elektrizitätswerk Obwalden

$$\sum_{k=EW1}^{EWx} \text{Preis}\Big|_{\text{Jahr}} = \sum_{k=EW1}^{EWx} \sum_{\substack{M \in \\ \text{Monate}}} \sum_{T=T_1}^{Tn} W_{M,\,T_{(k)}} * \left(\text{Preis}_W\right)_{T\,(k)} +$$

$$\sum_{k=EW1}^{EWx} \left(\max_{\substack{M \in \\ \text{Monate}}} \bigcup_{i=1}^{Mon|_d \cdot 96} \left\{ P_{M,i\,(k)} \right\} \right) * \text{Preis}_{P\,(k)} +$$

$$\sum_{k=EW1}^{EWx} VE_{(k)} * \text{Preis}_{ABO\,(k)} +$$

$$\sum_{k=EW1}^{EWx} EE_{W\,(k)} * \text{Preis}_{EE\,(k)} + \sum_{k=EW1}^{EWx} X_{DG\,(k)}$$

egende:

VE Vertrags-Energie
EE Ergänzungs-Energie
DG Durchleitungs-Gebühr

Janos Horvath Fa. SUN

gerold.schaedler@ewonet.ch

Elektrizitätswerk Obwalden

Energie-Preisberechnung

$$\forall \text{ Mon} \in \{\text{Okt, Nov, ..., Sept}\}$$

$$\sum_{k=EW1}^{EWx} Preis\Big|_{Jahr} = \sum_{k=EW1}^{EWx} \sum_{M \in Monate} \sum_{T=T_1}^{Tn} W_{M,T(k)} * \left(Preis_W\right)_{T(k)} +$$

$$\sum_{k=EW1}^{EWx} \left(\max_{M \in Monate} \bigcup_{i=1}^{Mon|_d \cdot 96} \left\{ P_{M,i(k)} \right\} \right) * Preis_{P(k)} +$$

$$\sum_{k=EW1}^{EWx} VE_{(k)} * Preis_{ABO(k)} +$$

$$\sum_{k=EW1}^{EWx} EE_{W(k)} * Preis_{EE(k)} + \sum_{k=EW1}^{EWx} X_{DG(k)}$$

Legende:

VE Vertrags-Energie
EE Ergänzungs-Energie
DG Durchleitungs-Gebühr

Janos Horvath Fa. SUN

gerold.schaedler@ewonet.ch

nge von je 1 m^3/s. Das Wasser läuft über ein offenes
es Melchtal, welche auch über natürliche Zuflüsse verf
en zur Fassung Klein Melchtal, welche das Wasser vo
470m, ins System einführt. Im Stollen geht es weiter i
k Kaiserstuhl mit einer 3 und einer 7 MW Francisturb
m (mittlere Höhe des Eingangsgebietes von 1370m). D
Oktober bis April um 40m (688 – 648 m.ü.M.). Wei
2 Francismaschinen à 24 MW und einer Einphasen B
ten Anlagen kommen 10 Kleinkraftwerke, zum Teil Tri
mit 2 MW Produktionsleistung. Diesem Produktionsp
vermag, stehen die Konsum angepassten Bedürfnisse
en die Meteo-Daten aufgrund von Swiss-Meteo, die al
von 72h, direkt in den Optimierungs-Server eingespiese
derschläge, deren Aggregatzustand auf den jeweiligen

Elektrizitätswerk Obwalden

nswassermenge von je 1 m^3/s. Das Wasser läuft über ein offenes Gerinne mit e
sung Grosses Melchtal, welche auch über natürliche Zuflüsse verfügt, in das Lun
spiegelstollen zur Fassung Klein Melchtal, welche das Wasser von einem Einzug
Höhe von $1470m$, ins System einführt. Im Stollen geht es weiter über den virtue
aufkraftwerk Kaiserstuhl mit einer 3 und einer 7 MW Francisturbine und einem
e von $106m$ (mittlere Höhe des Eingangsgebietes von $1370m$). Der Lungerersee
endelt von Oktober bis April um $40m$ ($688 - 648$ m.ü.M.). Weiter geht das Wa
nteraa mit 2 Francismaschinen à 24 MW und einer Einphasen Bahnstrommasch
en skizzierten Anlagen kommen 10 Kleinkraftwerke, zum Teil Trinkwasser-Zubri
fkraftwerk mit 2 MW Produktionsleistung. Diesem Produktionspotential, das 70
zu decken vermag, stehen die Konsum angepassten Bedürfnisse von ca. 220 GW
gnose werden die Meteo-Daten aufgrund von Swiss-Meteo, die als FTP-Daten 2
ezeitraum von $72h$, direkt in den Optimierungs-Server eingespiesen. Die Temper
er, die Niederschläge, deren Aggregatzustand auf den jeweiligen mittleren Einzu
ie Windrichtung und die Globalstrahlung dienen als optimalen Ersatz für die Be
g. Stromeinkäufe vom derzeitigen Vorlieferanten BKW, Naturalrückbezug von D
für die Bahnstromlieferung der Maschine 4 für die Brünigbahn 18 GWh pro Jah
aufes zu den angebotenen Strompreisen, als Band- und Ausgleichsenergie; Vorau
erfahren wir täglich via E-Mail den EEX-Handelpreis, zu welchem am Vortag a
rauf entscheiden wir, wieviel wir selber produzieren oder einkaufen sollen.

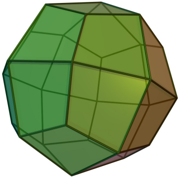
Elektrizitätswerk Obwalden

Kennwerte für die Seen im Modell: Einzugsgebiet, Höhe und Abflusskoeffizienten im Laufe des Jahres, Oberfläche, Inhalt, Tiefe, Pegelmarken (min.-max.), Querschnittsfunktion abhängig vom Füllungsgrad, Tage mit Eisbedeckung bei Tannen- und Melchsee, Verdunstungswerte im offenen Zustand, Zuflüsse, Entnahmen von Produktionswasser.
Kennwerte für die offenen Bachfluss-Strecken: Länge, Abflusszeit bei verschiedenen Wassermengen, Versickerungsmenge im Bachbett, Zuflüsse auf der Abschnittslänge.
Kennwerte Stollen-Druckleitungen: Länge, Querschnitt und Format, Typisierung Freispiegel- oder Druckstollen, Gefälle, Rauhigkeit nach Strickler, Druckverluste bei verschiedenem Durchsatz, Wasserverluste/Einträge und die Fliesszeit in Abhängigkeit der Menge.
Kennwerte Wasserfassungen: Oberfläche, Speichervolumen, geometrische Form, Überfallkante, Menge der verworfenen Wassermenge, Zuflüsse Zwischeneinzugsgebiet. Der Speicher Tannensee baut im Winter $3,7$ Mio. m^3 und der Melchsee $3,2$ Mio. m^3 ab, füllt sie während der Schneeschmelze und erfüllt dadurch die Konzessionstermine. Den Strom produzieren wir über die Nutzung des Gefälles von $825m$ im KW Hugschwendi in 2 Peltonturbinen à 7000 kW und einer Produktionswassermenge von je 1 m^3/s. Das Wasser läuft über ein offenes Gerinne mit einer Länge von $4500m$ zur Wasserfassung Grosses Melchtal, welche auch über natürliche Zuflüsse verfügt, in das Lungerersee-Kraftwerk. Ein $6500m$ langer Freispiegelstollen zur Fassung Klein Melchtal, welche das Wasser von einem Einzugsgebiet von $25,7$ km^2 auf einer mittleren Höhe von $1470m$, ins System einführt. Im Stollen geht es weiter über den virtuellen See als Knotenpunkt (Inhalt O) zum Laufkraftwerk Kaiserstuhl mit einer 3 und einer 7 MW Francisturbine und einem minimalen Gefälle bei vollem Lungerersee von $106m$ (mittlere Höhe des Eingangsgebietes von $1370m$). Der Lungerersee als natürlicher Speicher mit 50 Mio. m^3 pendelt von Oktober bis April um $40m$ ($688 - 648$ m.ü.M.). Weiter geht das Wasser zur der 1994 erneuerten Zentrale Unteraa mit 2 Francismaschinen à 24 MW und einer Einphasen Bahnstrommaschine (15 kV, 162/3 Hz) $6,5$ MW. Zu den skizzierten Anlagen kommen 10 Kleinkraftwerke, zum Teil Trinkwasser-Zubringern, und der Zukauf von einem Laufkraftwerk mit 2 MW Produktionsleistung. Diesem Produktionspotential, das $70 - 80$ % des Bedarfs in Obwalden zu decken vermag, stehen die Konsum angepassten Bedürfnisse von ca. 220 GWh gegenüber. Mit dem Tool STLF Prognose werden die Meteo-Daten aufgrund von Swiss-Meteo, die als FTP-Daten 2 mal täglich mit einem Voraussagezeitraum von $72h$, direkt in den Optimierungs-Server eingespiesen. Die Temperatur, umgerechnet mit einem Kalmanfilter, die Niederschläge, deren Aggregatzustand auf den jeweiligen mittleren Einzugsgebiet-Höhen, der Wind km/sec., die Windrichtung und die Globalstrahlung dienen als optimalen Ersatz für die Beurteilung der aktuellen Bewölkung. Stromeinkäufe vom derzeitigen Vorlieferanten BKW, Naturalrückbezug von Drehstrom 50 Hz von der SBB als Ausgleich für die Bahnstromlieferung der Maschine 4 für die Brünigbahn 18 GWh pro Jahr; kommerzielle Optimierung des Stromeinkaufes zu den angebotenen Strompreisen, als Band- und Ausgleichsenergie; Voraussage der Seespiegel; Mit dem Tool TOS erfahren wir täglich via E-Mail den EEX-Handelpreis, zu welchem am Vortag an der Börse in Leipzig gehandelt wurde. Darauf entscheiden wir, wieviel wir selber produzieren oder einkaufen sollen.

Lineares Optimierungsproblem

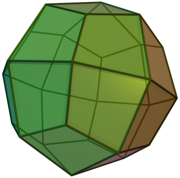
maximiere $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + \frac{3}{7}x_4 - 9\pi x_5$

unter den Bedingungen



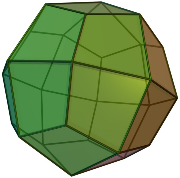
Lineares Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{maximiere} & x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & \frac{3}{7}x_4 & - & 9\pi x_5 & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0
\end{array}
$$



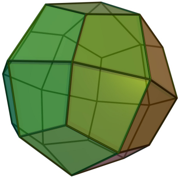
Lineares Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{maximiere} & x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & \frac{3}{7}x_4 & - & 9\pi x_5 & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0 \\
& -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq & 0
\end{array}
$$



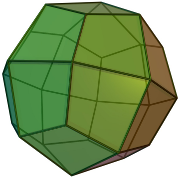
Lineares Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
\text{maximiere} & x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & \frac{3}{7}x_4 & - & 9\pi x_5 & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq & 0 \\
 & 7x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 5 & \geq & 0
\end{array}
$$



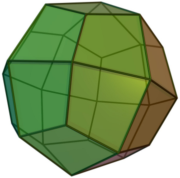
Lineares Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
\text{maximiere} & x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & \frac{3}{7}x_4 & - & 9\pi x_5 & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq & 0 \\
 & 7x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 5 & \geq & 0 \\
 & -\frac{19}{2}x_1 & - & 10x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 23x_4 & - & 6 & \geq & 0
\end{array}
$$



Lineares Ungleichungssystem

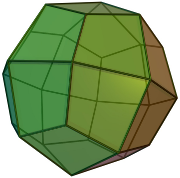
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq & 0 \\
7x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 5 & \geq & 0 \\
-\frac{19}{2}x_1 & - & 10x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 23x_4 & - & 6 & \geq & 0
\end{array}$$



Lineares Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

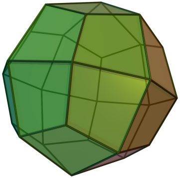
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0 \quad {\color{red}A} \\
-x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq & 0 \\
7x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 5 & \geq & 0 \\
-\frac{19}{2}x_1 & - & 10x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 23x_4 & - & 6 & \geq & 0
\end{array}$$



Lineares Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

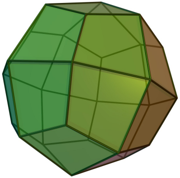
$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrl}
 & 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq & 0 & \\
 & 7x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 5 & \geq & 0 & \\
 & -\frac{19}{2}x_1 & - & 10x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 23x_4 & - & 6 & \geq & 0 & \\
4A & 8x_1 & + & 24x_2 & - & 4x_3 & + & 28x_4 & + & 4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



Lineares Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

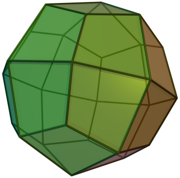
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcrl}
 & 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 5 & \geq & 0 & \\
 & -\frac{19}{2}x_1 & - & 10x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 23x_4 & - & 6 & \geq & 0 & \\
4A & 8x_1 & + & 24x_2 & - & 4x_3 & + & 28x_4 & + & 4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



Lineares Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

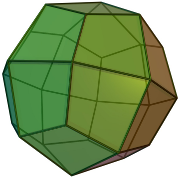
$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
 & 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 5 & \geq & 0 & \\
 & -\frac{19}{2}x_1 & - & 10x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 23x_4 & - & 6 & \geq & 0 & \\
4A & 8x_1 & + & 24x_2 & - & 4x_3 & + & 28x_4 & + & 4 & \geq & 0 & \\
3B & -3x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 21x_4 & - & 3 & \geq & 0 &
\end{array}$$



Lineares Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

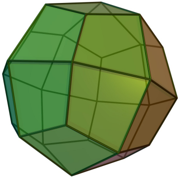
$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrl}
 & 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 5 & \geq & 0 & C \\
 & -\frac{19}{2}x_1 & - & 10x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 23x_4 & - & 6 & \geq & 0 & \\
4A & 8x_1 & + & 24x_2 & - & 4x_3 & + & 28x_4 & + & 4 & \geq & 0 & \\
3B & -3x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 21x_4 & - & 3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



Lineares Ungleichungssystem

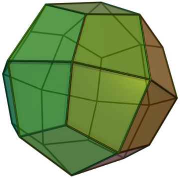
Nachweis der Unlösbarkeit

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
 & 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0 \quad A \\
 & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq & 0 \quad B \\
 & 7x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 5 & \geq & 0 \quad C \\
 & -\frac{19}{2}x_1 & - & 10x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 23x_4 & - & 6 & \geq & 0 \\
4A & 8x_1 & + & 24x_2 & - & 4x_3 & + & 28x_4 & + & 4 & \geq & 0 \\
3B & -3x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 21x_4 & - & 3 & \geq & 0 \\
2C & 14x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 10 & \geq & 0
\end{array}$$



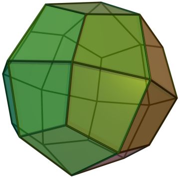
Lineares Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
 & 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0 \quad A \\
 & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq & 0 \quad B \\
 & 7x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 5 & \geq & 0 \quad C \\
 & -\frac{19}{2}x_1 & - & 10x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 23x_4 & - & 6 & \geq & 0 \quad D \\
4A & 8x_1 & + & 24x_2 & - & 4x_3 & + & 28x_4 & + & 4 & \geq & 0 \\
3B & -3x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 21x_4 & - & 3 & \geq & 0 \\
2C & 14x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 10 & \geq & 0
\end{array}
$$



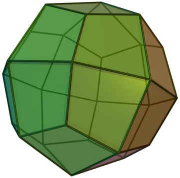
Lineares Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
 & 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq 0 & B \\
 & 7x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 5 & \geq 0 & C \\
 & -\frac{19}{2}x_1 & - & 10x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 23x_4 & - & 6 & \geq 0 & D \\
4A & 8x_1 & + & 24x_2 & - & 4x_3 & + & 28x_4 & + & 4 & \geq 0 & \\
3B & -3x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 21x_4 & - & 3 & \geq 0 & \\
2C & 14x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 10 & \geq 0 & \\
2D & -19x_1 & - & 20x_2 & + & 5x_3 & - & 46x_4 & - & 12 & \geq 0 &
\end{array}
$$



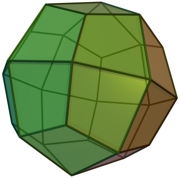
Lineares Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
 & 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0 \quad A \\
 & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq & 0 \quad B \\
 & 7x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 5 & \geq & 0 \quad C \\
 & -\frac{19}{2}x_1 & - & 10x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 23x_4 & - & 6 & \geq & 0 \quad D \\
4A & 8x_1 & + & 24x_2 & - & 4x_3 & + & 28x_4 & + & 4 & \geq & 0 \quad E \\
3B & -3x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 21x_4 & - & 3 & \geq & 0 \quad F \\
2C & 14x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 10 & \geq & 0 \quad G \\
2D & -19x_1 & - & 20x_2 & + & 5x_3 & - & 46x_4 & - & 12 & \geq & 0 \quad H
\end{array}
$$



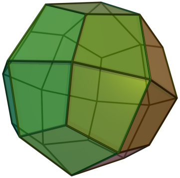
Lineares Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcll}
 & 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 5 & \geq & 0 & C \\
 & -\frac{19}{2}x_1 & - & 10x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 23x_4 & - & 6 & \geq & 0 & D \\
4A & 8x_1 & + & 24x_2 & - & 4x_3 & + & 28x_4 & + & 4 & \geq & 0 & E \\
3B & -3x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 21x_4 & - & 3 & \geq & 0 & F \\
2C & 14x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 10 & \geq & 0 & G \\
2D & -19x_1 & - & 20x_2 & + & 5x_3 & - & 46x_4 & - & 12 & \geq & 0 & H \\
E+F+G+H & & & & & & & & & -1 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



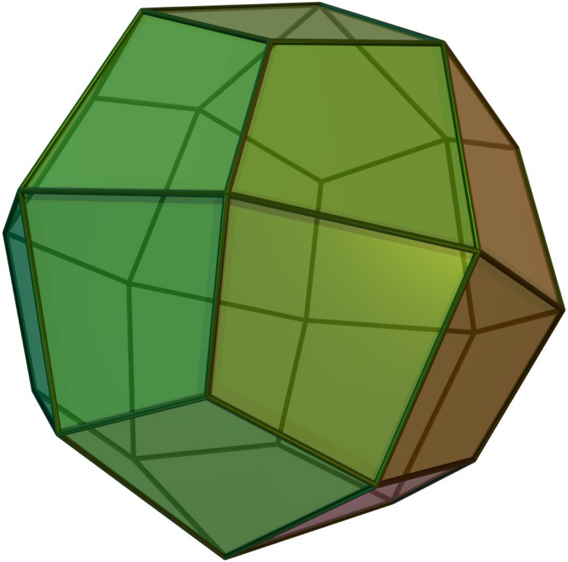
Lineares Ungleichungssystem

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcll}
 & 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & + & 1 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 1 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & - & \frac{3}{2}x_4 & + & 5 & \geq & 0 & C \\
 & -\frac{19}{2}x_1 & - & 10x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & - & 23x_4 & - & 6 & \geq & 0 & D \\
4A & 8x_1 & + & 24x_2 & - & 4x_3 & + & 28x_4 & + & 4 & \geq & 0 & E \\
3B & -3x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 21x_4 & - & 3 & \geq & 0 & F \\
2C & 14x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 10 & \geq & 0 & G \\
2D & -19x_1 & - & 20x_2 & + & 5x_3 & - & 46x_4 & - & 12 & \geq & 0 & H \\
E+F+G+H & & & & & & & & & -1 & \geq & 0 & \lightning
\end{array}
$$



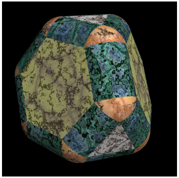
Polyeder

Deltoidalicositetrahedon



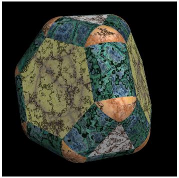
Semidefinites Optimierungsproblem

Semidefinite Optimierung ist eine Verallgemeinerung von linearer Optimierung,



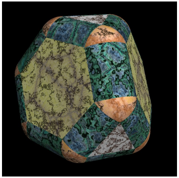
Semidefinites Optimierungsproblem

Semidefinite Optimierung ist eine Verallgemeinerung von linearer Optimierung, für die (hoffentlich bald) fast ebenso effiziente Verfahren existieren.



Semidefinites Optimierungsproblem

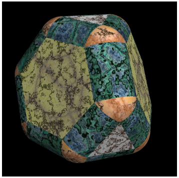
Semidefinite Optimierung ist eine Verallgemeinerung von linearer Optimierung, für die (hoffentlich bald) fast ebenso effiziente Verfahren existieren. Statt einer linearen Ungleichung darf man sogar gewisse Scharen von linearen Ungleichungen als Bedingungen angeben.



Semidefinites Optimierungsproblem

Semidefinite Optimierung ist eine Verallgemeinerung von linearer Optimierung, für die (hoffentlich bald) fast ebenso effiziente Verfahren existieren. Statt einer linearen Ungleichung darf man sogar gewisse Scharen von linearen Ungleichungen als Bedingungen angeben.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 8x_4 & -x_1 + x_4 & x_2 \\ -x_1 + x_4 & x_1 - 9x_3 & x_2 - 3 \\ x_2 & x_2 - 3 & x_4 + 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0 \qquad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

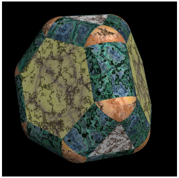


Semidefinites Optimierungsproblem

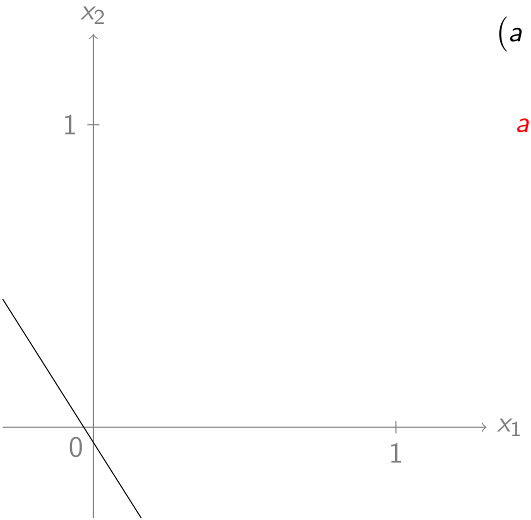
Semidefinite Optimierung ist eine Verallgemeinerung von linearer Optimierung, für die (hoffentlich bald) fast ebenso effiziente Verfahren existieren. Statt einer linearen Ungleichung darf man sogar gewisse Scharen von linearen Ungleichungen als Bedingungen angeben.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 8x_4 & -x_1 + x_4 & x_2 \\ -x_1 + x_4 & x_1 - 9x_3 & x_2 - 3 \\ x_2 & x_2 - 3 & x_4 + 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0 \qquad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

Dahinter steckt die Theorie der Eigenwerte und der Diagonalisierung von symmetrischen Matrizen.

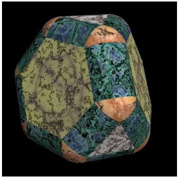


Semidefinites Optimierungsproblem

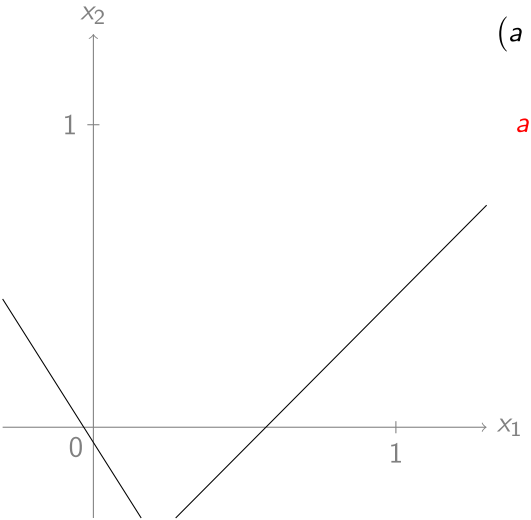


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

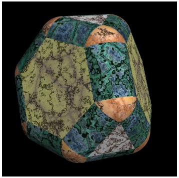


Semidefinites Optimierungsproblem

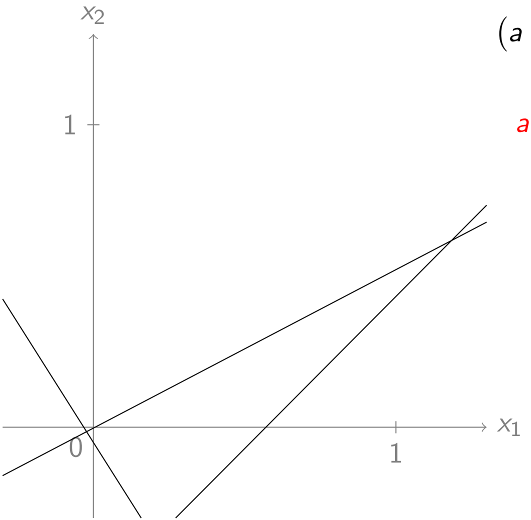


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

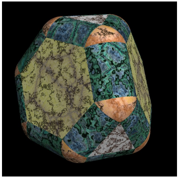


Semidefinites Optimierungsproblem

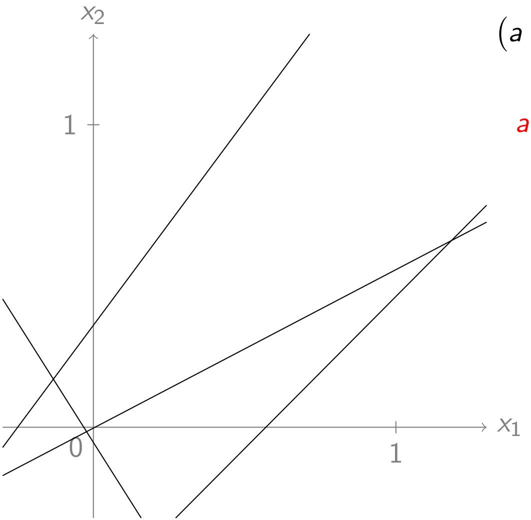


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

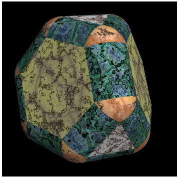


Semidefinites Optimierungsproblem

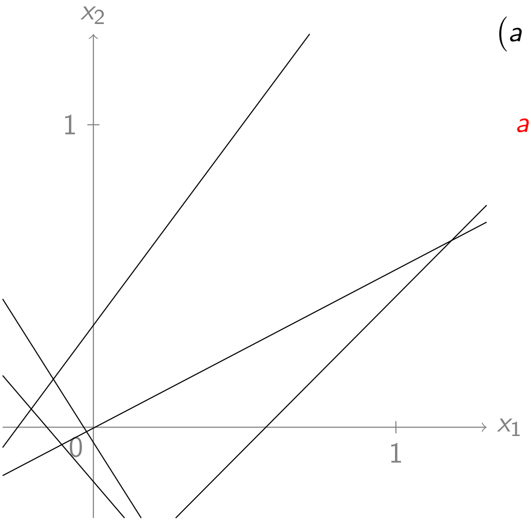


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

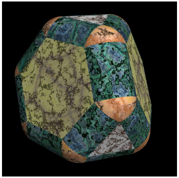


Semidefinites Optimierungsproblem

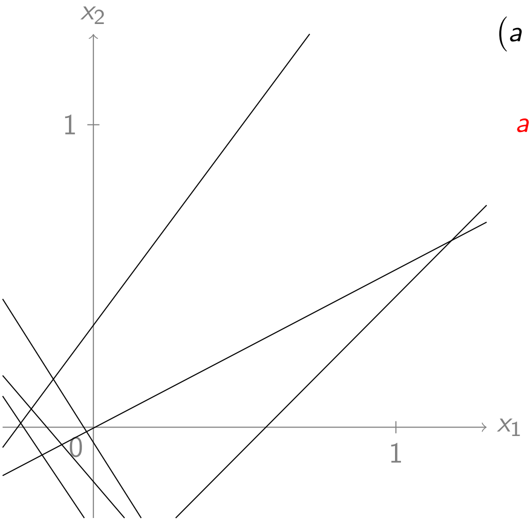


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

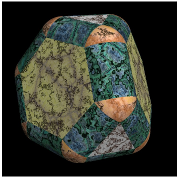


Semidefinites Optimierungsproblem

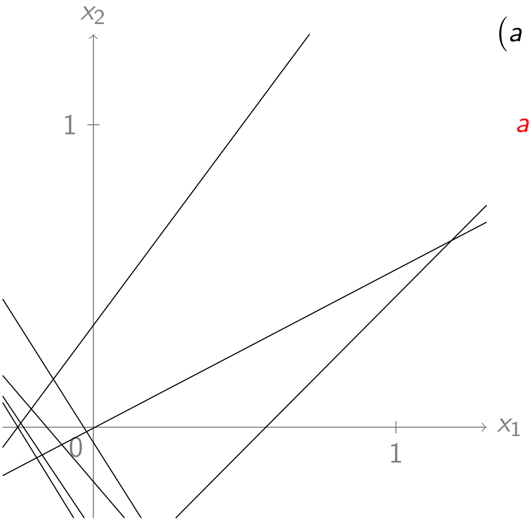


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

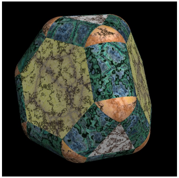


Semidefinites Optimierungsproblem

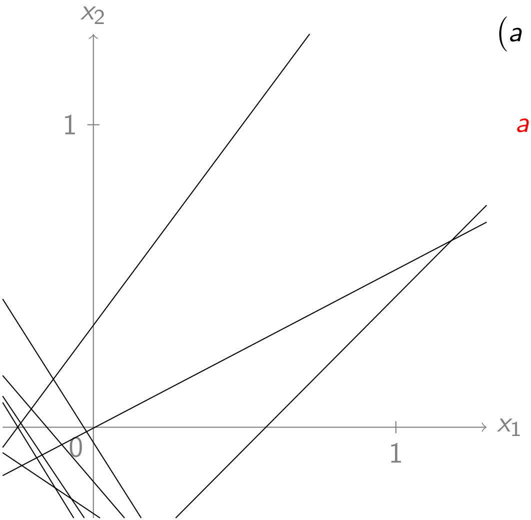


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

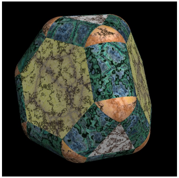


Semidefinites Optimierungsproblem

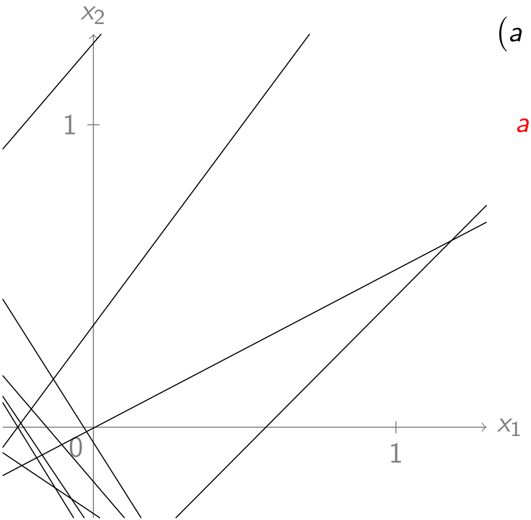


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

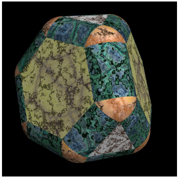


Semidefinites Optimierungsproblem

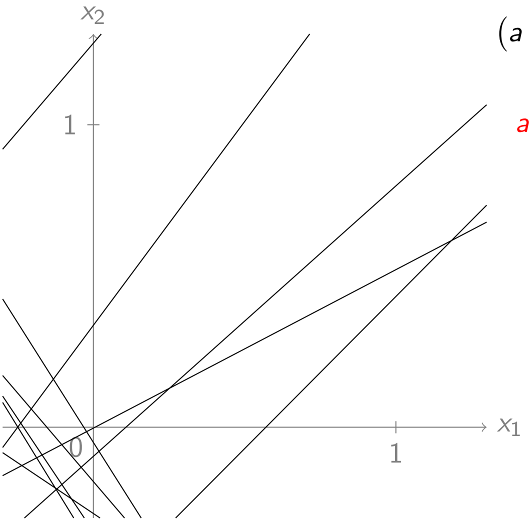


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

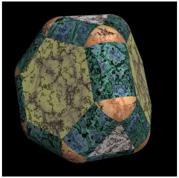


Semidefinites Optimierungsproblem

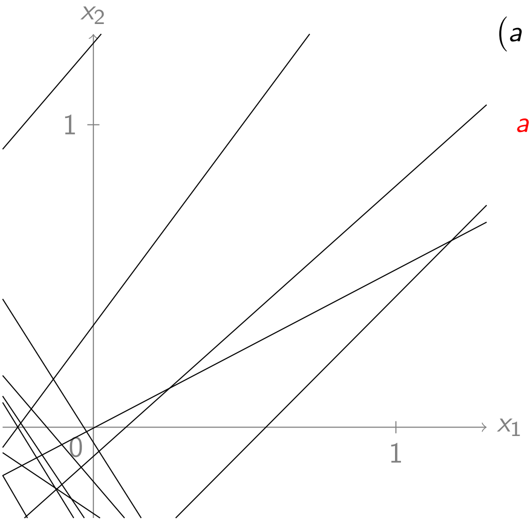


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

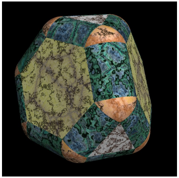


Semidefinites Optimierungsproblem

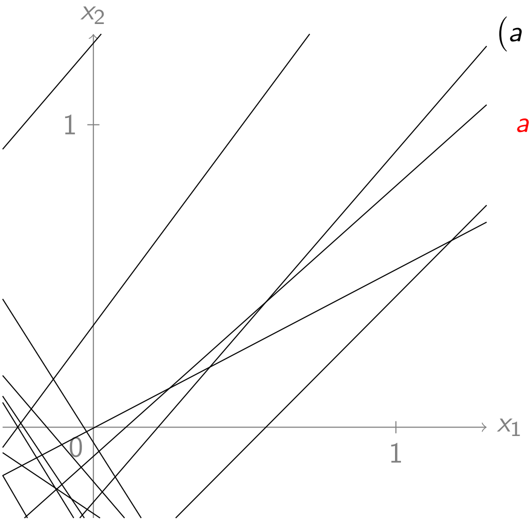


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

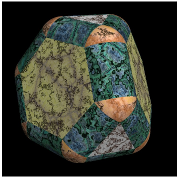


Semidefinites Optimierungsproblem

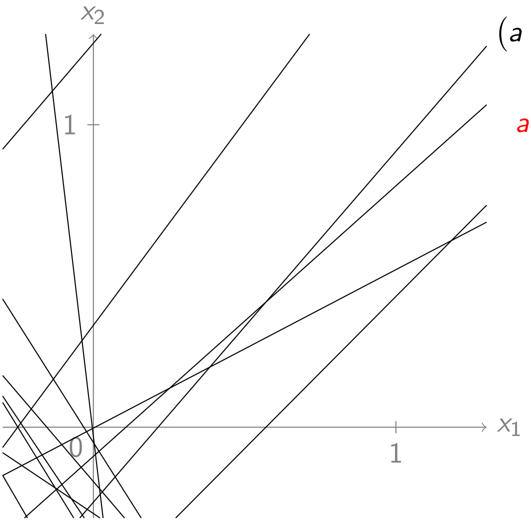


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

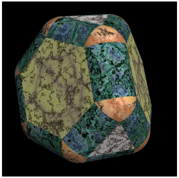


Semidefinites Optimierungsproblem

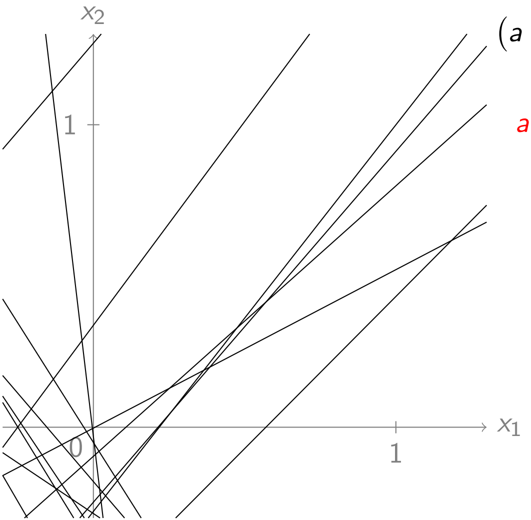


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

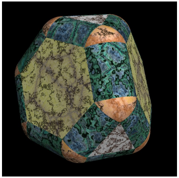


Semidefinites Optimierungsproblem

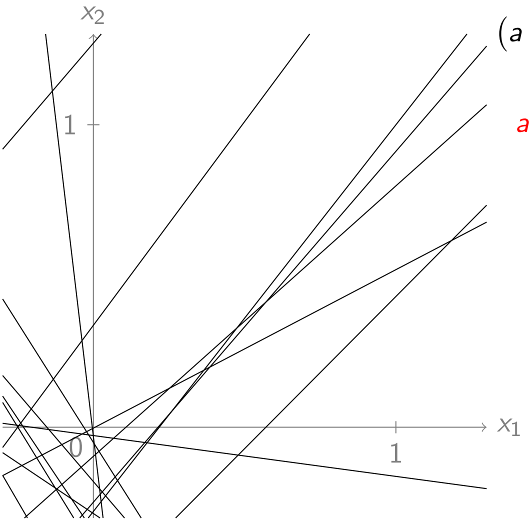


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

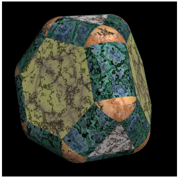


Semidefinites Optimierungsproblem

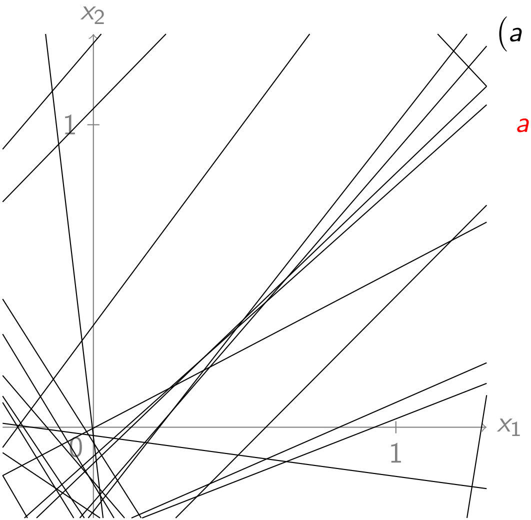


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

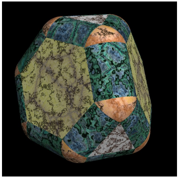


Semidefinites Optimierungsproblem

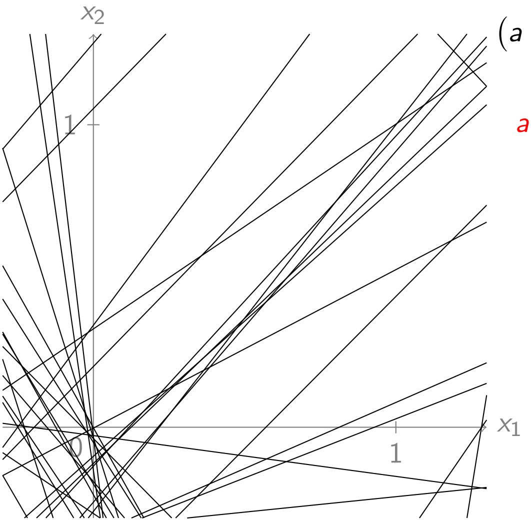


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

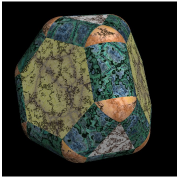


Semidefinites Optimierungsproblem

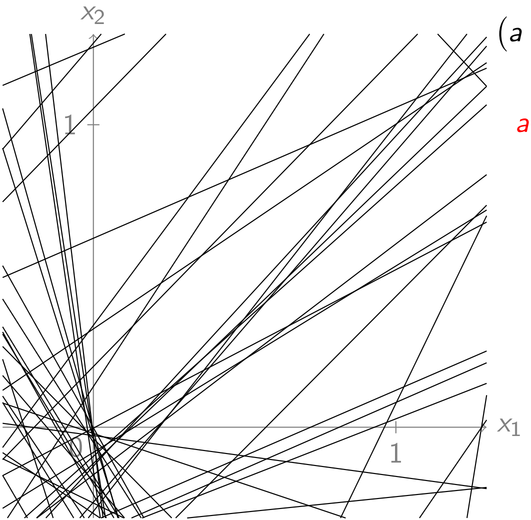


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

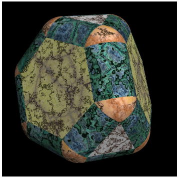


Semidefinites Optimierungsproblem

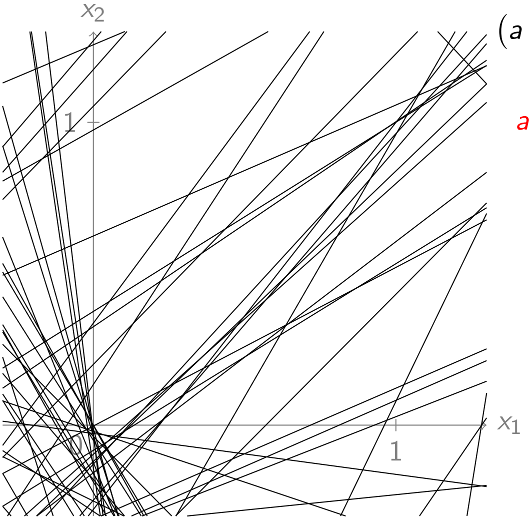


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

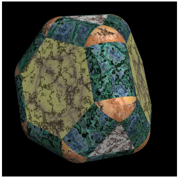


Semidefinites Optimierungsproblem

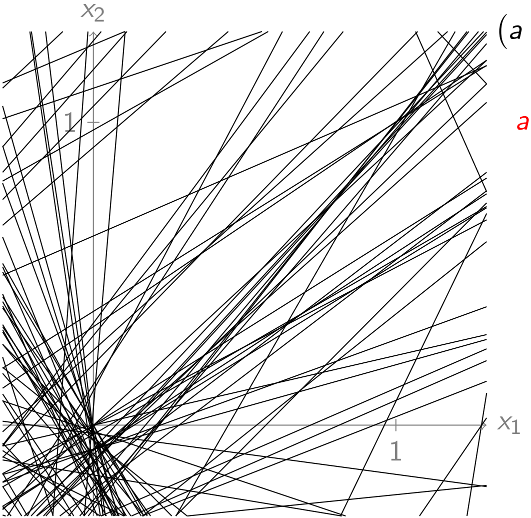


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

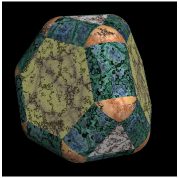


Semidefinites Optimierungsproblem

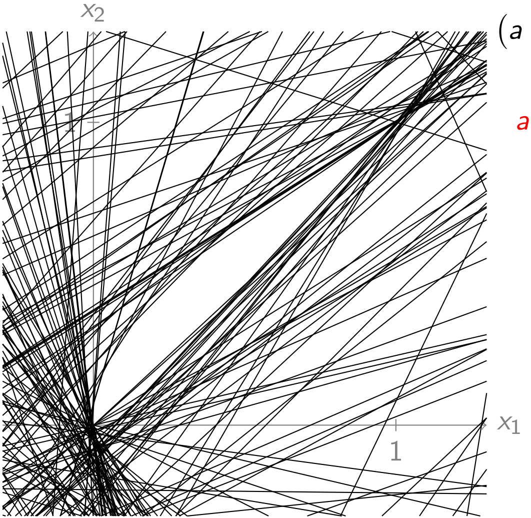


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

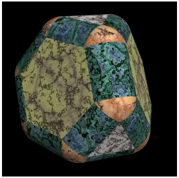


Semidefinites Optimierungsproblem

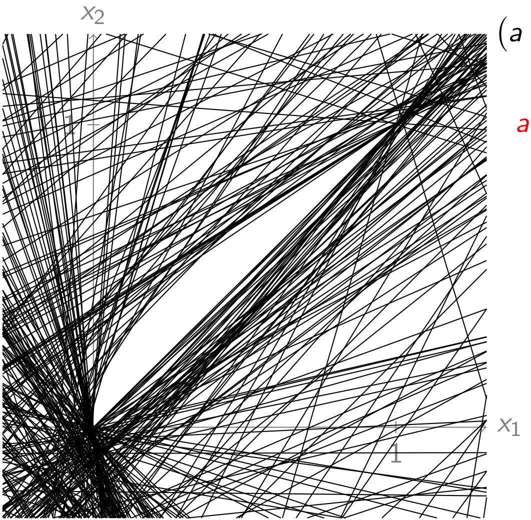


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

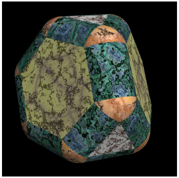


Semidefinites Optimierungsproblem

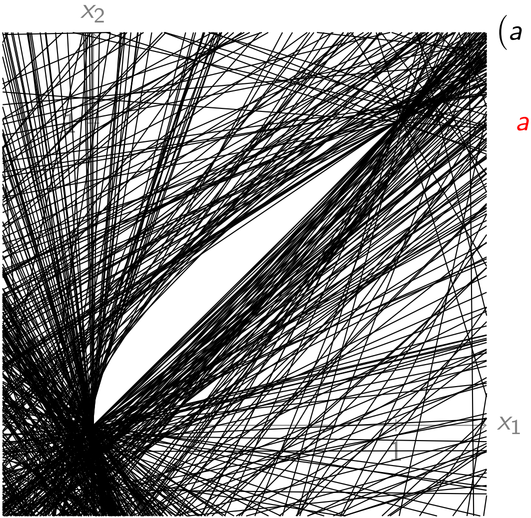


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

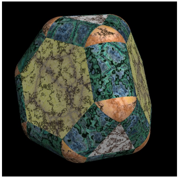


Semidefinites Optimierungsproblem

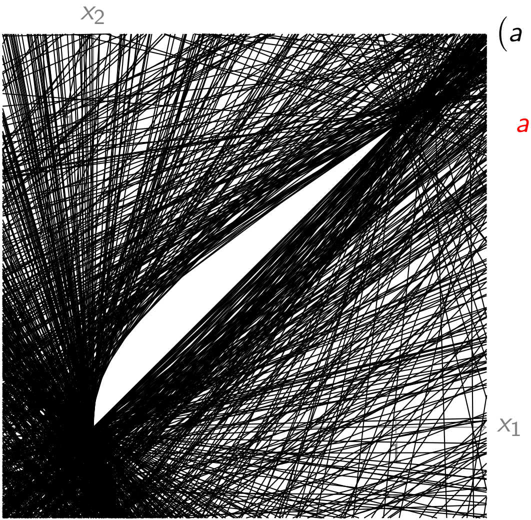


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

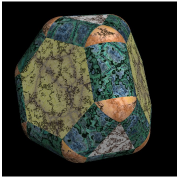


Semidefinites Optimierungsproblem

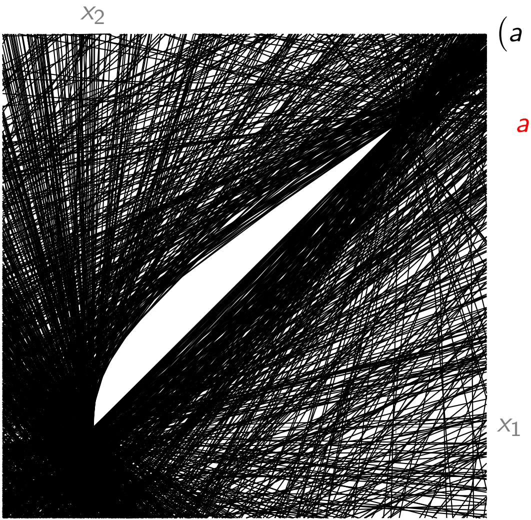


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

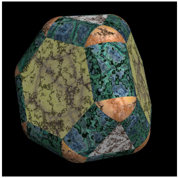


Semidefinites Optimierungsproblem

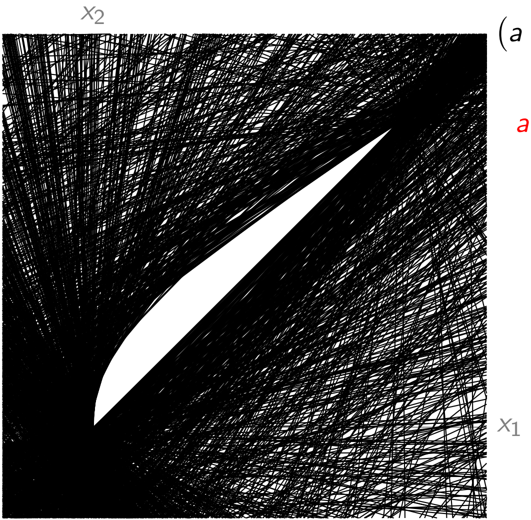


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt

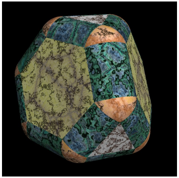


Semidefinites Optimierungsproblem

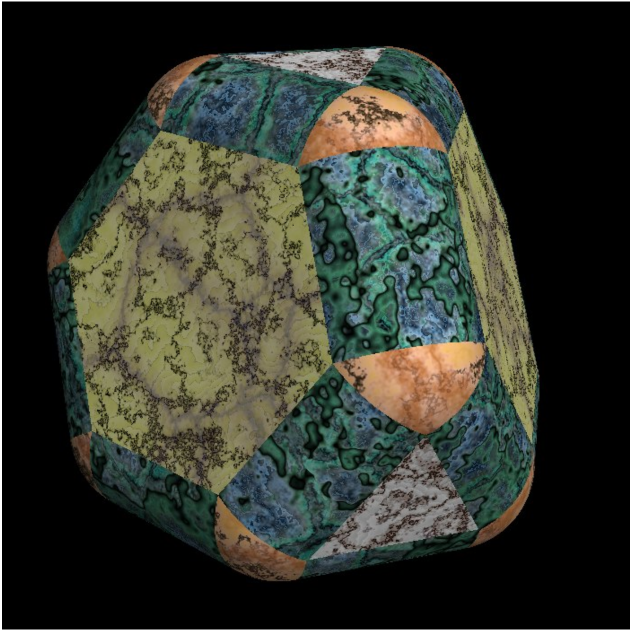


$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

a, b, c unabhängig normalverteilt



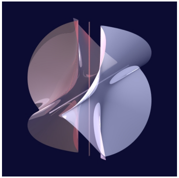
Semidefinites Optimierungsproblem



Polynomiales Optimierungsproblem

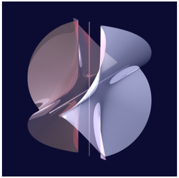
maximiere $\quad x_1x_2^2 \quad + \quad x_1x_2x_3^5 \quad - \quad 3x_1x_2^8x_3 \quad + \quad 7$

unter den Bedingungen



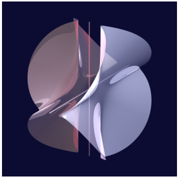
Polynomiales Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rccccccccc} \text{maximiere} & x_1x_2^2 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\ \text{unter den} & & & & & & & & & \\ \text{Bedingungen} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \end{array}$$



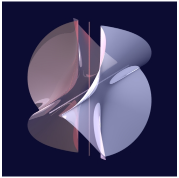
Polynomiales Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{maximiere} & x_1x_2^2 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0
\end{array}$$



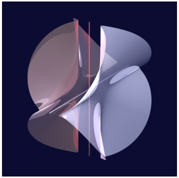
Polynomiales Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcc}
\text{maximiere} & x_1x_2^2 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0
\end{array}
$$



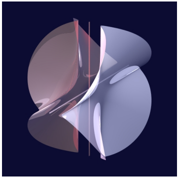
Polynomiales Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcr}
\text{maximiere} & x_1x_2^2 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
& -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
& 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
& 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$



Polynomiales Ungleichungssystem

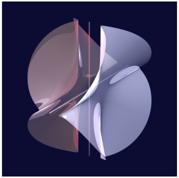
$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$



Polynomiales Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

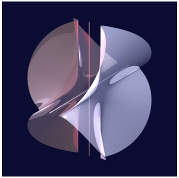
$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \quad {\color{red}A} \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}
$$



Polynomiales Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

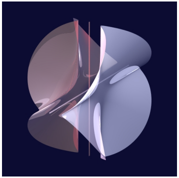
$$\begin{array}{rcrcrcrcccl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 &
\end{array}$$



Polynomiales Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

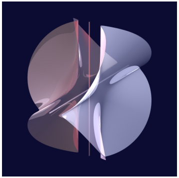
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
 & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 &
\end{array}
$$



Polynomiales Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

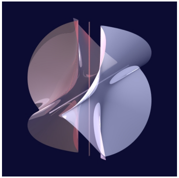
$$\begin{array}{rrrcrcrcrcrl}
& 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
& -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
& 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & \\
& 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \dots & \geq & 0 &
\end{array}$$



Polynomiales Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

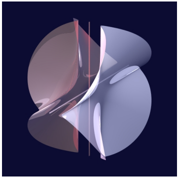
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
 & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \dots & \geq & 0 &
\end{array}
$$



Polynomiales Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

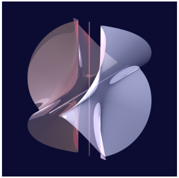
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
 & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \dots & \geq & 0 & \\
C^2 \cdot D & -x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 &
\end{array}
$$



Polynomiales Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

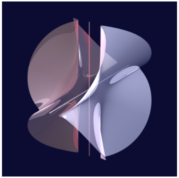
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
 & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \ldots & \geq & 0 & \\
C^2 \cdot D & -x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 &
\end{array}
$$



Polynomiales Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

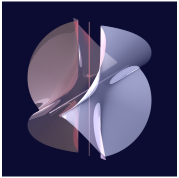
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
 & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \quad A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \quad B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \quad D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \quad E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \dots & \geq & 0 \\
C^2 \cdot D & -x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18x_1x_2^2 & + & \dots & \geq & 0
\end{array}
$$



Polynomiales Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

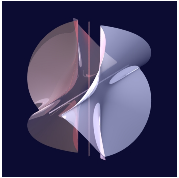
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrr}
 & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & -x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18x_1x_2^2 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$



Polynomiales Ungleichungssystem

Nachweis der Unlösbarkeit

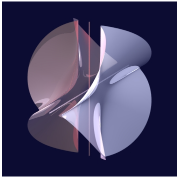
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
 & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & -x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18x_1x_2^2 & + & \dots & \geq & 0 & I \\
F+G+H+I & & & & & & & -1 & \geq & 0 &
\end{array}
$$



Polynomiales Ungleichungssystem

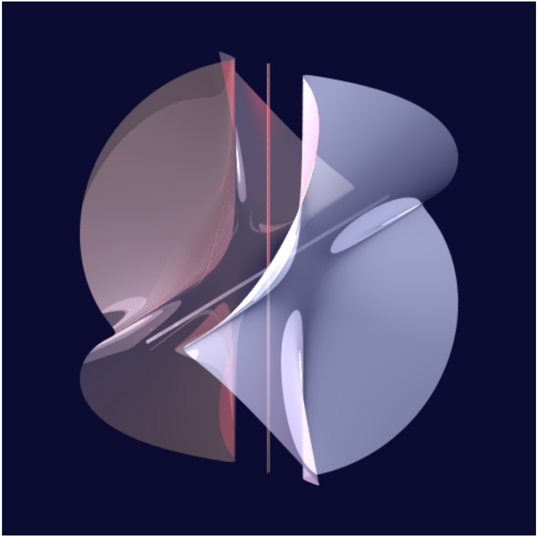
Nachweis der Unlösbarkeit

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcc l}
 & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & -x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18x_1x_2^2 & + & \dots & \geq & 0 & I \\
F + G + H + I & & & & & & & -1 & \geq & 0 & \lightning
\end{array}
$$



Polynomiales Gleichungssystem

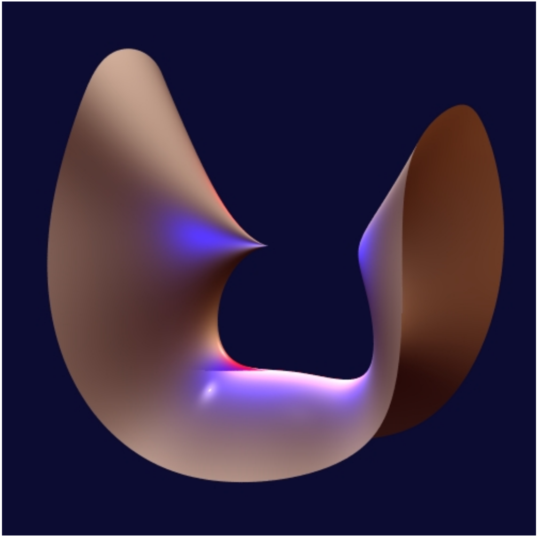
$$x_1^4 - x_1^2 - x_2^2 x_3^2 = 0$$



http://www1-c703.uibk.ac.at/mathematik/project/bildergalerie/gallery.html

Polynomiales Gleichungssystem

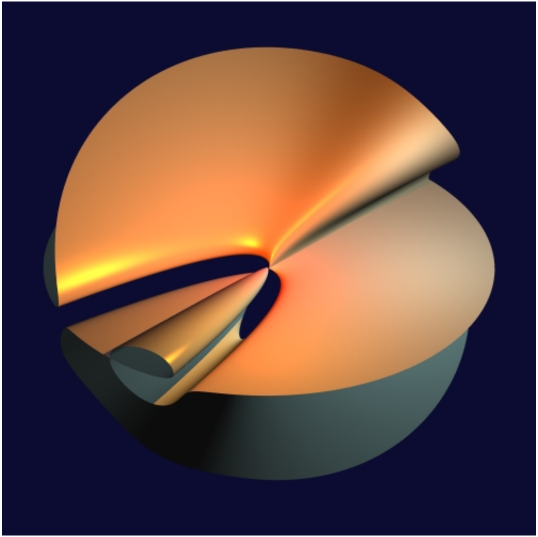
$$x_1^2 - x_1^3 + x_2^2 + x_2^4 + x_3^3 - x_3^4 = 0$$



http://www1-c703.uibk.ac.at/mathematik/project/bildergalerie/gallery.html

Polynomiales Gleichungssystem

$$x_1^3 x_3 + x_1^2 + x_2 x_3^3 + x_3^4 = 3 x_1 x_2 x_3$$

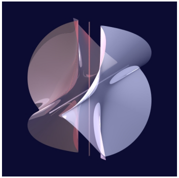


http://www1-c703.uibk.ac.at/mathematik/project/bildergalerie/gallery.html

Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

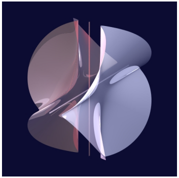
$$
\begin{array}{rcccccccccc}
\text{maximiere} & x_1x_2^2 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & -x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18x_1x_2^2 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$



Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

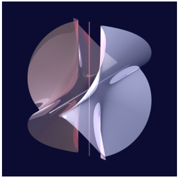
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{maximiere} & x_1x_2^2 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & -x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18x_1x_2^2 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$



Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

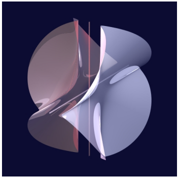
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{maximiere} & z_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6z_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & -x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18z_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$



Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

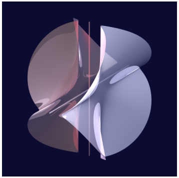
maximiere	z_1	$+$	$x_1x_2x_3^5$	$-$	$3x_1x_2^8x_3$	$+$	7			
unter den Bedingungen	$2x_1x_2$	$+$	$6x_2^2$	$-$	$x_2x_3^3$	$+$	$x_2^3x_4^2$	$\geq$	0	A
	$-x_1$	$-$	$x_1x_2^6$	$-$	x_3	$+$	$7x_4$	$\geq$	0	B
	$7x_1x_2x_4^2$	$-$	$\frac{1}{2}x_2^2$	$+$	$x_1x_3^2$	$-$	$\ldots$	$\geq$	0	D
	$3x_1$	$+$	$6x_2x_3^4$	$+$	x_1x_3	$-$	3	$\geq$	0	E
$A \cdot B$	$-2x_1^2x_2$	$-$	$6z_1$	$-$	$2x_1^2x_2^7$	$-$	$\ldots$	$\geq$	0	F
C^2	$2x_1^2$	$+$	$6x_2^4$	$-$	x_1x_2	$+$	$\ldots$	$\geq$	0	G
$C^2 \cdot D$	$-x_1^2x_2^2$	$+$	$\frac{1}{2}x_1x_2^3$	$-$	$3x_2^6$	$+$	$\ldots$	$\geq$	0	H
$A \cdot B \cdot E$	$6x_1^2x_2$	$-$	$6x_1^3x_2$	$+$	$18z_1$	$+$	$\ldots$	$\geq$	0	I



Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

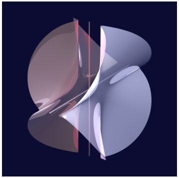
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{maximiere} & z_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2z_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6z_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & z_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & -x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18z_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$



Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

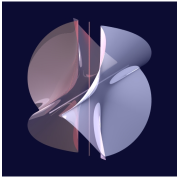
maximiere	z_1	$+$	$x_1x_2x_3^5$	$-$	$3x_1x_2^8x_3$	$+$	7			
unter den Bedingungen	$2z_2$	$+$	$6x_2^2$	$-$	$x_2x_3^3$	$+$	$x_2^3x_4^2$	$\geq$	0	A
	$-x_1$	$-$	$x_1x_2^6$	$-$	x_3	$+$	$7x_4$	$\geq$	0	B
	$7x_1x_2x_4^2$	$-$	$\frac{1}{2}x_2^2$	$+$	$x_1x_3^2$	$-$	$\dots$	$\geq$	0	D
	$3x_1$	$+$	$6x_2x_3^4$	$+$	x_1x_3	$-$	3	$\geq$	0	E
$A \cdot B$	$-2x_1^2x_2$	$-$	$6z_1$	$-$	$2x_1^2x_2^7$	$-$	$\dots$	$\geq$	0	F
C^2	$2x_1^2$	$+$	$6x_2^4$	$-$	z_2	$+$	$\dots$	$\geq$	0	G
$C^2 \cdot D$	$-x_1^2x_2^2$	$+$	$\frac{1}{2}x_1x_2^3$	$-$	$3x_2^6$	$+$	$\dots$	$\geq$	0	H
$A \cdot B \cdot E$	$6x_1^2x_2$	$-$	$6x_1^3x_2$	$+$	$18z_1$	$+$	$\dots$	$\geq$	0	I



Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

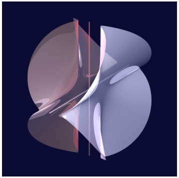
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\text{maximiere} & z_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2z_2 & + & 6z_3 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}z_3 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6z_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & z_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & -x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18z_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$



Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

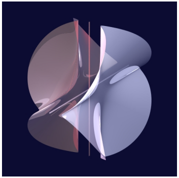
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrl}
\text{maximiere} & z_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2z_2 & + & 6z_3 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}z_3 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2x_1^2x_2 & - & 6z_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & z_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & -x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18z_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$



Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

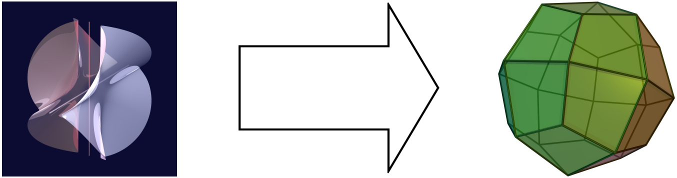
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcll}
\text{maximiere} & z_1 & + & x_1x_2x_3^5 & - & 3x_1x_2^8x_3 & + & 7 & & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2z_2 & + & 6z_3 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & 7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}z_3 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A\cdot B & -2z_4 & - & 6z_1 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & z_2 & + & \ldots & \geq & 0 & G \\
C^2\cdot D & -x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 & H \\
A\cdot B\cdot E & 6z_4 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18z_1 & + & \ldots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$



Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

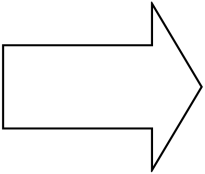
$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{maximiere} & z_1 & + & z_4 & - & 3z_5 & + & 7 & & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2z_2 & + & 6z_3 & - & z_6 & + & z_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & z_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & z_9 & - & \frac{1}{2}z_3 & + & z_{10} & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6z_{11} & + & z_{12} & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2z_4 & - & 6z_1 & - & 2z_{13} & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2z_{14} & + & 6z_{15} & - & z_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & -z_{16} & + & \frac{1}{2}z_{17} & - & 3z_{18} & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6z_4 & - & 6z_{19} & + & 18z_1 & + & \dots & \geq & 0 & I
\end{array}
$$



Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\text{maximiere} & z_1 & + & z_4 & - & 3z_5 & + & 7 & & & \\
\text{unter den} & & & & & & & & & & \\
\text{Bedingungen} & 2z_2 & + & 6z_3 & - & z_6 & + & z_7 & \geq & 0 & A \\
 & -x_1 & - & z_8 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 & B \\
 & z_9 & - & \frac{1}{2}z_3 & + & z_{10} & - & \dots & \geq & 0 & D \\
 & 3x_1 & + & 6z_{11} & + & z_{12} & - & 3 & \geq & 0 & E \\
A \cdot B & -2z_4 & - & 6z_1 & - & 2z_{13} & - & \dots & \geq & 0 & F \\
C^2 & 2z_{14} & + & 6z_{15} & - & z_2 & + & \dots & \geq & 0 & G \\
C^2 \cdot D & -z_{16} & + & \frac{1}{2}z_{17} & - & 3z_{18} & + & \dots & \geq & 0 & H \\
A \cdot B \cdot E & 6z_4 & - & 6z_{19} & + & 18z_1 & + & \dots & \geq & 0 & I \\
F + G + H + I & & & & & & & -1 & \geq & 0 & \lightning
\end{array}
$$



Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierung

Satz (Krivine, 1964): Ist ein polynomiales Ungleichungssystem unlösbar, so kann man immer endlich viele blaue Ungleichungen hinzunehmen unter denen die letzte $-1 \geq 0$ ist.

1

2

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierung

Satz (Krivine, 1964): Ist ein polynomiales Ungleichungssystem unlösbar, so kann man immer endlich viele blaue Ungleichungen hinzunehmen unter denen die letzte $-1 \geq 0$ ist.

Beweisidee als Schmankerl am Ende des Vortrags.

1

2

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierung

Satz (Krivine, 1964): Ist ein polynomiales Ungleichungssystem unlösbar, so kann man immer endlich viele blaue Ungleichungen hinzunehmen unter denen die letzte $-1 \geq 0$ ist.

Beweisidee als Schmankerl am Ende des Vortrags.

Dies hat Krivine in seiner fulminanten Débutarbeit Anneaux préordonnés bewiesen, die fast vierzig Jahre ignoriert wurde, bevor Prestel sie entdeckte.

[1]

[2]

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierung

Satz (Krivine, 1964): Ist ein polynomiales Ungleichungssystem unlösbar, so kann man immer endlich viele blaue Ungleichungen hinzunehmen unter denen die letzte $-1 \geq 0$ ist.

Beweisidee als Schmankerl am Ende des Vortrags.

Dies hat Krivine in seiner fulminanten Débutarbeit Anneaux préordonnés bewiesen, die fast vierzig Jahre ignoriert wurde, bevor Prestel sie entdeckte. Im Nachhinein kann diese Arbeit als Startpunkt der modernen reellen Algebra gesehen werden.

---

[1] Jedes nichtnegative Polynom ist eine Quadratsumme von rationalen Funktionen.

[2] Im Jahr 1900 stellte Hilbert in Paris 23 berühmte Probleme vor.

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierung

Satz (Krivine, 1964): Ist ein polynomiales Ungleichungssystem unlösbar, so kann man immer endlich viele blaue Ungleichungen hinzunehmen unter denen die letzte $-1 \geq 0$ ist.

Beweisidee als Schmankerl am Ende des Vortrags.

Dies hat Krivine in seiner fulminanten Débutarbeit Anneaux préordonnés bewiesen, die fast vierzig Jahre ignoriert wurde, bevor Prestel sie entdeckte. Im Nachhinein kann diese Arbeit als Startpunkt der modernen reellen Algebra gesehen werden. Sie baut auf Artins Lösung[1] des 17. Hilbertschen Problems[2] und auf Tarskis reeller Quantorenelimination auf.

[1] Jedes nichtnegative Polynom ist eine Quadratsumme von rationalen Funktionen.

[2] Im Jahr 1900 stellte Hilbert in Paris 23 berühmte Probleme vor.

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierung

Satz (Krivine, 1964): Ist ein polynomiales Ungleichungssystem unlösbar, so kann man immer endlich viele blaue Ungleichungen hinzunehmen unter denen die letzte $-1 \geq 0$ ist.

Beweisidee als Schmankerl am Ende des Vortrags.

Dies hat Krivine in seiner fulminanten Débutarbeit Anneaux préordonnés bewiesen, die fast vierzig Jahre ignoriert wurde, bevor Prestel sie entdeckte. Im Nachhinein kann diese Arbeit als Startpunkt der modernen reellen Algebra gesehen werden. Sie baut auf Artins Lösung[1] des 17. Hilbertschen Problems[2] und auf Tarskis reeller Quantorenelimination auf. Das Resultat wurde etliche Jahre später unabhängig von Prestel und Stengle gefunden.

[1] Jedes nichtnegative Polynom ist eine Quadratsumme von rationalen Funktionen.

[2] Im Jahr 1900 stellte Hilbert in Paris 23 berühmte Probleme vor.

Polynomiales Ungleichungssystem

Linearisierung

Satz (Krivine, 1964): Ist ein polynomiales Ungleichungssystem unlösbar, so kann man immer endlich viele blaue Ungleichungen hinzunehmen unter denen die letzte $-1 \geq 0$ ist.

Beweisidee als Schmankerl am Ende des Vortrags.

Dies hat Krivine in seiner fulminanten Débutarbeit Anneaux préordonnés bewiesen, die fast vierzig Jahre ignoriert wurde, bevor Prestel sie entdeckte. Im Nachhinein kann diese Arbeit als Startpunkt der modernen reellen Algebra gesehen werden. Sie baut auf Artins Lösung[1] des 17. Hilbertschen Problems[2] und auf Tarskis reeller Quantorenelimination auf. Das Resultat wurde etliche Jahre später unabhängig von Prestel und Stengle gefunden.

Folgerung: Wenn man zu einem polynomialen Ungleichungssystem endlich viele geeignete blaue Gleichungen hinzufügt, so bleibt eine leere Lösungsmenge nach Linearisierung leer.

[1] Jedes nichtnegative Polynom ist eine Quadratsumme von rationalen Funktionen.

[2] Im Jahr 1900 stellte Hilbert in Paris 23 berühmte Probleme vor.

Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

Mit anderen Worten: Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem keine Lösung hat und man endlich viele geeignete blaue Gleichungen hinzufügt, so hat das linearisierte Gleichungssystem auch keine Lösung.

3

4

5

Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

Mit anderen Worten: Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem keine Lösung hat und man endlich viele geeignete blaue Gleichungen hinzufügt, so hat das linearisierte Gleichungssystem auch keine Lösung.

Dieser algebraische Satz wird in allen Beweisen des folgenden ursprünglich funktionalanalytischen Resultats benutzt.

Satz (Schmüdgen, 1991): Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem eine kompakte Lösungsmenge hat

---

3

4

5

Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

Mit anderen Worten: Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem keine Lösung hat und man endlich viele geeignete blaue Gleichungen hinzufügt, so hat das linearisierte Gleichungssystem auch keine Lösung.

Dieser algebraische Satz wird in allen Beweisen des folgenden ursprünglich funktionalanalytischen Resultats benutzt.

Satz (Schmüdgen, 1991): Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem eine kompakte Lösungsmenge hat und man alle[3] blauen Gleichungen hinzufügt,

3

4

5

Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

Mit anderen Worten: Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem keine Lösung hat und man endlich viele geeignete blaue Gleichungen hinzufügt, so hat das linearisierte Gleichungssystem auch keine Lösung.

Dieser algebraische Satz wird in allen Beweisen des folgenden ursprünglich funktionalanalytischen Resultats benutzt.

Satz (Schmüdgen, 1991): Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem eine kompakte Lösungsmenge hat und man alle[3] blauen Gleichungen hinzufügt,

[3] unendlich vielen

[4]

[5]

Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

Mit anderen Worten: Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem keine Lösung hat und man endlich viele geeignete blaue Gleichungen hinzufügt, so hat das linearisierte Gleichungssystem auch keine Lösung.

Dieser algebraische Satz wird in allen Beweisen des folgenden ursprünglich funktionalanalytischen Resultats benutzt.

Satz (Schmüdgen, 1991): Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem eine kompakte Lösungsmenge hat und man alle[3] blauen Gleichungen hinzufügt, dann entspricht die Lösungsmenge des linearisierten Systems[4] so gut es geht der Lösungsmenge des Ausgangssystems.[5]

[3] unendlich vielen

[4]

[5]

Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

Mit anderen Worten: Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem keine Lösung hat und man endlich viele geeignete blaue Gleichungen hinzufügt, so hat das linearisierte Gleichungssystem auch keine Lösung.

Dieser algebraische Satz wird in allen Beweisen des folgenden ursprünglich funktionalanalytischen Resultats benutzt.

Satz (Schmüdgen, 1991): Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem eine kompakte Lösungsmenge hat und man alle[3] blauen Gleichungen hinzufügt, dann entspricht die Lösungsmenge des linearisierten Systems[4] so gut es geht der Lösungsmenge des Ausgangssystems.[5]

---

[3] unendlich vielen

[4] ein unendliches lineares Ungleichungssystem mit unendlich vielen Variablen

[5]

Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

Mit anderen Worten: Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem keine Lösung hat und man endlich viele geeignete blaue Gleichungen hinzufügt, so hat das linearisierte Gleichungssystem auch keine Lösung.

Dieser algebraische Satz wird in allen Beweisen des folgenden ursprünglich funktionalanalytischen Resultats benutzt.

Satz (Schmüdgen, 1991): Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem eine kompakte Lösungsmenge hat und man alle[3] blauen Gleichungen hinzufügt, dann entspricht die Lösungsmenge des linearisierten Systems[4] so gut es geht der Lösungsmenge des Ausgangssystems.[5]

---

[3] unendlich vielen

[4] ein unendliches lineares Ungleichungssystem mit unendlich vielen Variablen

[5] Die Projektion der neuen Lösungsmenge auf die x_i-Variablen ist die konvexe Hülle der ursprünglichen Lösungsmenge.

Polynomiales Optimierungsproblem

Linearisierung

Mit anderen Worten: Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem keine Lösung hat und man endlich viele geeignete blaue Gleichungen hinzufügt, so hat das linearisierte Gleichungssystem auch keine Lösung.

Dieser algebraische Satz wird in allen Beweisen des folgenden ursprünglich funktionalanalytischen Resultats benutzt.

Satz (Schmüdgen, 1991): Wenn ein polynomiales Ungleichungssystem eine kompakte Lösungsmenge hat und man alle[3] blauen Gleichungen hinzufügt, dann entspricht die Lösungsmenge des linearisierten Systems[4] so gut es geht der Lösungsmenge des Ausgangssystems.[5]
In der Sprache der Optimierung:
Der Optimalwert jeglicher Zielfunktion bleibt erhalten.

---

[3]unendlich vielen

[4]ein unendliches lineares Ungleichungssystem mit unendlich vielen Variablen

[5]Die Projektion der neuen Lösungsmenge auf die x_i-Variablen ist die konvexe Hülle der ursprünglichen Lösungsmenge.

Polynomiales Optimierungsproblem

Problem: In der linearen Optimierung sind natürlich nur endlich viele Ungleichungen und endlich viele Variablen erlaubt. Man kann also nicht alle blauen Ungleichungen dazunehmen.

Polynomiales Optimierungsproblem

Problem: In der linearen Optimierung sind natürlich nur endlich viele Ungleichungen und endlich viele Variablen erlaubt. Man kann also nicht alle blauen Ungleichungen dazunehmen.

Idee (Lasserre, 2001): Man kann große Scharen von blauen Ungleichungen dazunehmen, so daß man nach Linearisierung ein semidefinites Programm hat. Ist etwa C die Ungleichung $ax_1 + bx_2 + c \geq 0$, so ist C^2 die blaue Ungleichung

$$(ax_1 + bx_2 + c)^2 \geq 0$$

$(a, b, c \in \mathbb{R})$.

Polynomiales Optimierungsproblem

Problem: In der linearen Optimierung sind natürlich nur endlich viele Ungleichungen und endlich viele Variablen erlaubt. Man kann also nicht alle blauen Ungleichungen dazunehmen.

Idee (Lasserre, 2001): Man kann große Scharen von blauen Ungleichungen dazunehmen, so daß man nach Linearisierung ein semidefinites Programm hat. Ist etwa C die Ungleichung $ax_1 + bx_2 + c \geq 0$, so ist C^2 die blaue Ungleichung

$$(ax_1 + bx_2 + c)(ax_1 + bx_2 + c) \geq 0$$

$(a, b, c \in \mathbb{R})$.

Polynomiales Optimierungsproblem

Problem: In der linearen Optimierung sind natürlich nur endlich viele Ungleichungen und endlich viele Variablen erlaubt. Man kann also nicht alle blauen Ungleichungen dazunehmen.

Idee (Lasserre, 2001): Man kann große Scharen von blauen Ungleichungen dazunehmen, so daß man nach Linearisierung ein semidefinites Programm hat. Ist etwa C die Ungleichung $ax_1 + bx_2 + c \geq 0$, so ist C^2 die blaue Ungleichung

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} (ax_1 + bx_2 + c) \geq 0$$

$(a, b, c \in \mathbb{R})$.

Polynomiales Optimierungsproblem

Problem: In der linearen Optimierung sind natürlich nur endlich viele Ungleichungen und endlich viele Variablen erlaubt. Man kann also nicht alle blauen Ungleichungen dazunehmen.

Idee (Lasserre, 2001): Man kann große Scharen von blauen Ungleichungen dazunehmen, so daß man nach Linearisierung ein semidefinites Programm hat. Ist etwa C die Ungleichung $ax_1 + bx_2 + c \geq 0$, so ist C^2 die blaue Ungleichung

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

$(a, b, c \in \mathbb{R})$.

Polynomiales Optimierungsproblem

Problem: In der linearen Optimierung sind natürlich nur endlich viele Ungleichungen und endlich viele Variablen erlaubt. Man kann also nicht alle blauen Ungleichungen dazunehmen.

Idee (Lasserre, 2001): Man kann große Scharen von blauen Ungleichungen dazunehmen, so daß man nach Linearisierung ein semidefinites Programm hat. Ist etwa C die Ungleichung $ax_1 + bx_2 + c \geq 0$, so ist C^2 die blaue Ungleichung

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2 \\ x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

$(a, b, c \in \mathbb{R})$.

Polynomiales Optimierungsproblem

Problem: In der linearen Optimierung sind natürlich nur endlich viele Ungleichungen und endlich viele Variablen erlaubt. Man kann also nicht alle blauen Ungleichungen dazunehmen.

Idee (Lasserre, 2001): Man kann große Scharen von blauen Ungleichungen dazunehmen, so daß man nach Linearisierung ein semidefinites Programm hat. Ist etwa C die Ungleichung $ax_1 + bx_2 + c \geq 0$, so ist C^2 die blaue Ungleichung

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2 \\ x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \geq 0$$

$(a, b, c \in \mathbb{R})$.

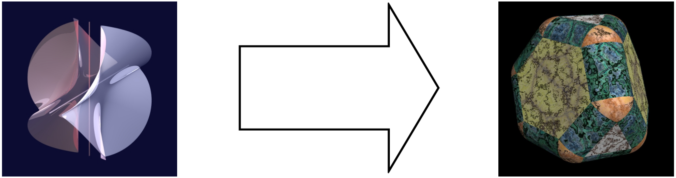
Man kann zeigen, daß man systematisch solche und ähnliche Scharen hinzunehmen kann, so daß die Linearisierung das ursprüngliche polynomiale Optimierungsproblem beliebig gut approximiert.

Polynomiales Optimierungsproblem

Die hinzuzunehmenden Scharen sind von der Form wie sie in der semidefiniten Optimierung erlaubt sind.

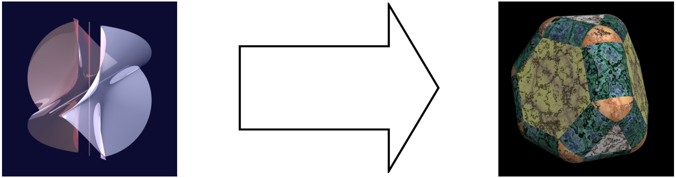
Polynomiales Optimierungsproblem

Die hinzuzunehmenden Scharen sind von der Form wie sie in der semidefiniten Optimierung erlaubt sind.



Polynomiales Optimierungsproblem

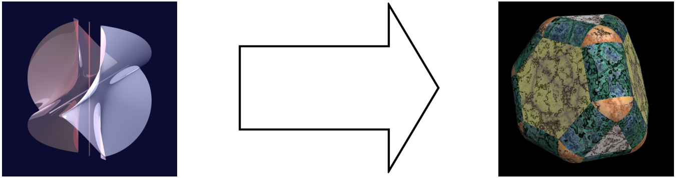
Die hinzuzunehmenden Scharen sind von der Form wie sie in der semidefiniten Optimierung erlaubt sind.



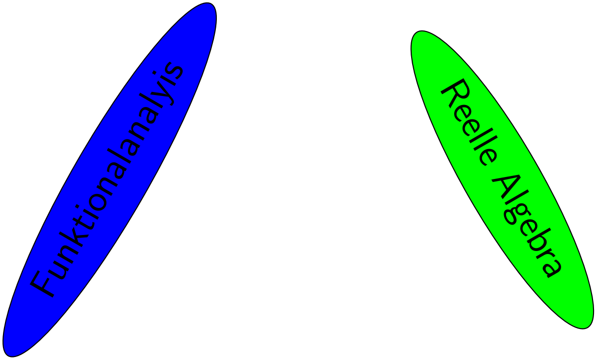
Konstanzer Beiträge beziehen sich hauptsächlich darauf, welche und wieviele Scharen man am besten hinzunehmen muß, um eine gute oder oder gar exakte Approximation zu bekommen:

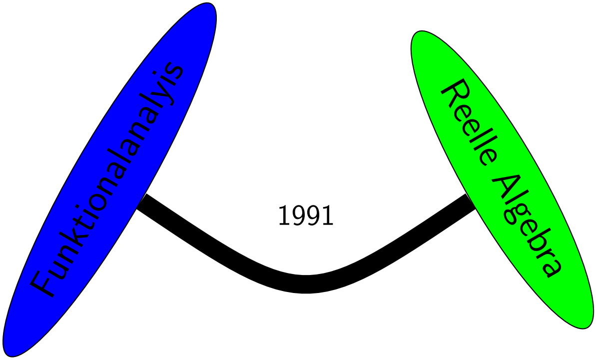
Polynomiales Optimierungsproblem

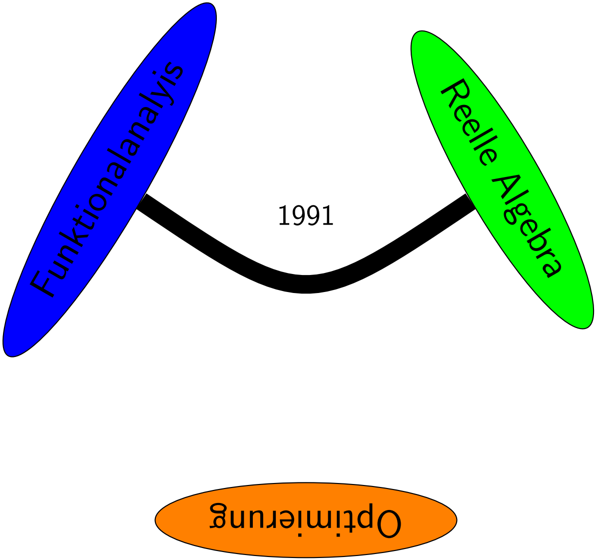
Die hinzuzunehmenden Scharen sind von der Form wie sie in der semidefiniten Optimierung erlaubt sind.

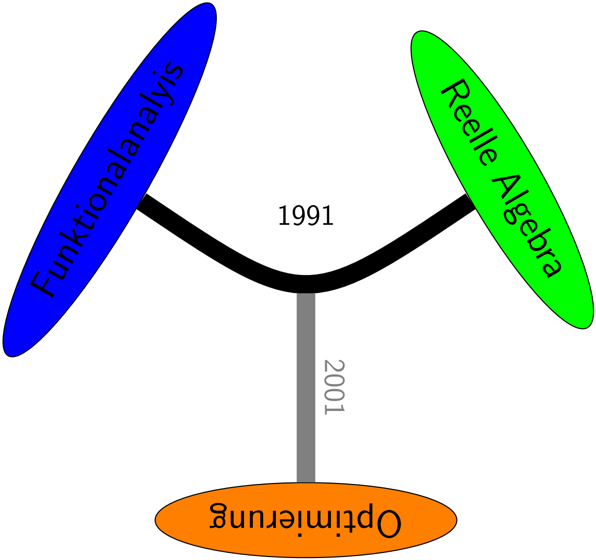


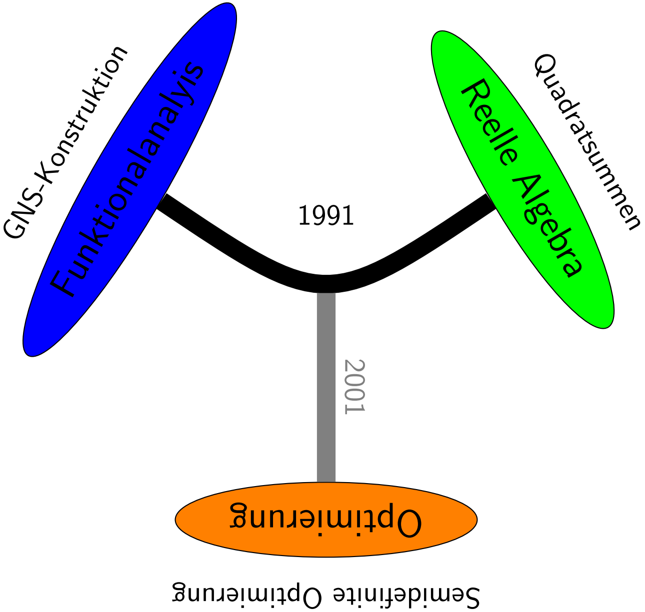
Konstanzer Beiträge beziehen sich hauptsächlich darauf, welche und wieviele Scharen man am besten hinzunehmen muß, um eine gute oder oder gar exakte Approximation zu bekommen: Burgdorf, Canto Cabral, Grimm, Jacobi, Netzer, Plaumann, Prestel, Scheiderer, Schweighofer.

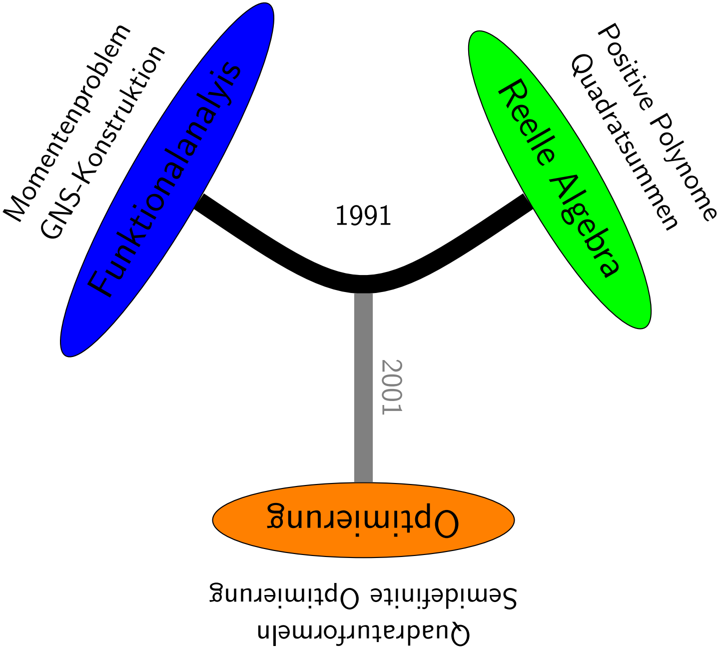

Funktionalanalyis
Reelle Algebra


Funktionalanalyis
1991
Reelle Algebra


Funktionalanalyis
Reelle Algebra
1991
Optimierung


Funktionalanalyis
Reelle Algebra
1991
2001
Optimierung


GNS-Konstruktion
Funktionalanalyis
1991
Reelle Algebra
Quadratsummen
2001
Optimierung
Semidefinite Optimierung


Momentenproblem
GNS-Konstruktion
Funktionalanalyis
1991
Reelle Algebra
Positive Polynome
Quadratsummen
2001
Optimierung
Semidefinite Optimierung
Quadraturformeln

Implementierungen des Verfahrens

Alle Pakete benutzen MATLAB und einen semidefiniten Optimierungssolver wie SeDuMi.

- GloptiPoly, LAAS Toulouse
  Henrion, Lasserre und Löfberg
  `http://www.laas.fr/~henrion/software/gloptipoly3/`
- YALMIP, ETH Zürich
  Löfberg
  `http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php`
- SOSTOOLS, Caltech
  Prajna, Papachristodoulou, Seiler, Parrilo
  `http://www.cds.caltech.edu/sostools/`
- SparsePOP, Tokyo Institut of Technology
  Waki, Kim, Kojima, Muramatsu, Sugimoto
  `http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/SparsePOP/`

Implementierungen des Verfahrens

Alle Pakete benutzen MATLAB und einen semidefiniten Optimierungssolver wie SeDuMi.

- GloptiPoly, LAAS Toulouse
  Henrion, Lasserre und Löfberg
  `http://www.laas.fr/~henrion/software/gloptipoly3/`
- YALMIP, ETH Zürich
  Löfberg
  `http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php`
- SOSTOOLS, Caltech
  Prajna, Papachristodoulou, Seiler, Parrilo
  `http://www.cds.caltech.edu/sostools/`
- SparsePOP, Tokyo Institut of Technology
  Waki, Kim, Kojima, Muramatsu, Sugimoto
  `http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/SparsePOP/`

Implementierungen des Verfahrens

Alle Pakete benutzen MATLAB und einen semidefiniten Optimierungssolver wie SeDuMi.

- GloptiPoly, LAAS Toulouse
  Henrion, Lasserre und Löfberg
  `http://www.laas.fr/~henrion/software/gloptipoly3/`
- YALMIP, ETH Zürich
  Löfberg
  `http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php`
- SOSTOOLS, Caltech
  Prajna, Papachristodoulou, Seiler, Parrilo
  `http://www.cds.caltech.edu/sostools/`
- SparsePOP, Tokyo Institut of Technology
  Waki, Kim, Kojima, Muramatsu, Sugimoto
  `http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/SparsePOP/`

Implementierungen des Verfahrens

Alle Pakete benutzen MATLAB und einen semidefiniten Optimierungssolver wie SeDuMi.

- GloptiPoly, LAAS Toulouse
  Henrion, Lasserre und Löfberg
  `http://www.laas.fr/~henrion/software/gloptipoly3/`
- YALMIP, ETH Zürich
  Löfberg
  `http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php`
- SOSTOOLS, Caltech
  Prajna, Papachristodoulou, Seiler, Parrilo
  `http://www.cds.caltech.edu/sostools/`
- SparsePOP, Tokyo Institut of Technology
  Waki, Kim, Kojima, Muramatsu, Sugimoto
  `http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/SparsePOP/`

Implementierungen des Verfahrens

Alle Pakete benutzen MATLAB und einen semidefiniten Optimierungssolver wie SeDuMi.

- GloptiPoly, LAAS Toulouse
  Henrion, Lasserre und Löfberg
  `http://www.laas.fr/~henrion/software/gloptipoly3/`
- YALMIP, ETH Zürich
  Löfberg
  `http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php`
- SOSTOOLS, Caltech
  Prajna, Papachristodoulou, Seiler, Parrilo
  `http://www.cds.caltech.edu/sostools/`
- SparsePOP, Tokyo Institut of Technology
  Waki, Kim, Kojima, Muramatsu, Sugimoto
  `http://www.is.titech.ac.jp/~kojima/SparsePOP/`

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Satz (Krivine, 1964): Ist ein polynomiales Ungleichungssystem unlösbar, so kann man immer endlich viele blaue Ungleichungen hinzunehmen unter denen die letzte $-1 \geq 0$ ist.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Satz (Krivine, 1964): Ist ein polynomiales Ungleichungssystem unlösbar, so kann man immer endlich viele blaue Ungleichungen hinzunehmen unter denen die letzte $-1 \geq 0$ ist.

Krivine zeigt die dazu äquivalente Kontraposition:

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Satz (Krivine, 1964): Ist ein polynomiales Ungleichungssystem unlösbar, so kann man immer endlich viele blaue Ungleichungen hinzunehmen unter denen die letzte $-1 \geq 0$ ist.

Krivine zeigt die dazu äquivalente Kontraposition: Sei ein polynomiales Ungleichungssystem gegeben, so daß man keine blauen Ungleichungen hinzufügen kann, unter denen sich $-1 \geq 0$ findet.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Satz (Krivine, 1964): Ist ein polynomiales Ungleichungssystem unlösbar, so kann man immer endlich viele blaue Ungleichungen hinzunehmen unter denen die letzte $-1 \geq 0$ ist.

Krivine zeigt die dazu äquivalente Kontraposition: Sei ein polynomiales Ungleichungssystem gegeben, so daß man keine blauen Ungleichungen hinzufügen kann, unter denen sich $-1 \geq 0$ findet. Dann hat dieses Ungleichungssystem eine Lösung.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Satz (Krivine, 1964): Ist ein polynomiales Ungleichungssystem unlösbar, so kann man immer endlich viele blaue Ungleichungen hinzunehmen unter denen die letzte $-1 \geq 0$ ist.

Krivine zeigt die dazu äquivalente Kontraposition: Sei ein polynomiales Ungleichungssystem gegeben, so daß man keine blauen Ungleichungen hinzufügen kann, unter denen sich $-1 \geq 0$ findet. Dann hat dieses Ungleichungssystem eine Lösung.

Paradoxe Grundidee:

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Satz (Krivine, 1964): Ist ein polynomiales Ungleichungssystem unlösbar, so kann man immer endlich viele blaue Ungleichungen hinzunehmen unter denen die letzte $-1 \geq 0$ ist.

Krivine zeigt die dazu äquivalente Kontraposition: Sei ein polynomiales Ungleichungssystem gegeben, so daß man keine blauen Ungleichungen hinzufügen kann, unter denen sich $-1 \geq 0$ findet. Dann hat dieses Ungleichungssystem eine Lösung.

Paradoxe Grundidee: Hinzufügen roter Ungleichungen verkleinert eventuell die Lösungsmenge,

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Satz (Krivine, 1964): Ist ein polynomiales Ungleichungssystem unlösbar, so kann man immer endlich viele blaue Ungleichungen hinzunehmen unter denen die letzte $-1 \geq 0$ ist.

Krivine zeigt die dazu äquivalente Kontraposition: Sei ein polynomiales Ungleichungssystem gegeben, so daß man keine blauen Ungleichungen hinzufügen kann, unter denen sich $-1 \geq 0$ findet. Dann hat dieses Ungleichungssystem eine Lösung.

Paradoxe Grundidee: Hinzufügen roter Ungleichungen verkleinert eventuell die Lösungsmenge, aber erleichtert trotzdem, das Finden einer Lösung.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Paradoxe Grundidee: Hinzufügen roter Ungleichungen verkleinert eventuell die Lösungsmenge, aber erleichtert trotzdem, das Finden einer Lösung.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Paradoxe Grundidee: Hinzufügen roter Ungleichungen verkleinert eventuell die Lösungsmenge, aber erleichtert trotzdem, das Finden einer Lösung.

$$\begin{aligned}
x_1x_2^2 - x_4^2 &\geq 0\\
-x_1x_2 + x_4^2 + x_1 - x_4 - 1 &\geq 0\\
x_4^3 + 4x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_4 - 2x_1 + 4x_4 &\geq 0\\
\left.\begin{array}{r} x_1x_2^3 - x_1x_2^2x_4 + 2x_2x_4^3 - 4x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_4 \\ -x_4^3 + 5x_2x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_4 - 4x_4^2 - 4x_4 \end{array}\right\} &\geq 0\\
-x_2x_4^2 + x_1x_2 - 4x_2x_4 + 2x_4^2 - x_1 - 4x_2 + 3x_4 - 2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Paradoxe Grundidee: Hinzufügen roter Ungleichungen verkleinert eventuell die Lösungsmenge, aber erleichtert trotzdem, das Finden einer Lösung.

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 x_2^2 - x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 x_2 + x_4^2 + x_1 - x_4 - 1 & \geq & 0 \\
x_4^3 + 4x_4^2 + x_1 x_2 - x_1 x_4 - 2x_1 + 4x_4 & \geq & 0 \\
\left.\begin{array}{r} x_1 x_2^3 - x_1 x_2^2 x_4 + 2x_2 x_4^3 - 4x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_4 \\ -x_4^3 + 5x_2 x_4^2 + 4x_1 x_2 + 2x_2 x_4 - 4x_4^2 - 4x_4 \end{array}\right\} & \geq & 0 \\
-x_2 x_4^2 + x_1 x_2 - 4x_2 x_4 + 2x_4^2 - x_1 - 4x_2 + 3x_4 - 2 & \geq & 0 \\
x_4 & \geq & 10
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Paradoxe Grundidee: Hinzufügen roter Ungleichungen verkleinert eventuell die Lösungsmenge, aber erleichtert trotzdem, das Finden einer Lösung.

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 x_2^2 - x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 x_2 + x_4^2 + x_1 - x_4 - 1 & \geq & 0 \\
x_4^3 + 4x_4^2 + x_1 x_2 - x_1 x_4 - 2x_1 + 4x_4 & \geq & 0 \\
\left.\begin{array}{r} x_1 x_2^3 - x_1 x_2^2 x_4 + 2x_2 x_4^3 - 4x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_4 \\ -x_4^3 + 5x_2 x_4^2 + 4x_1 x_2 + 2x_2 x_4 - 4x_4^2 - 4x_4 \end{array}\right\} & \geq & 0 \\
-x_2 x_4^2 + x_1 x_2 - 4x_2 x_4 + 2x_4^2 - x_1 - 4x_2 + 3x_4 - 2 & \geq & 0 \\
x_4 & \geq & 10 \\
-x_4 & \geq & -20
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Paradoxe Grundidee: Hinzufügen roter Ungleichungen verkleinert eventuell die Lösungsmenge, aber erleichtert trotzdem, das Finden einer Lösung.

$$
\begin{aligned}
x_1x_2^2 - x_4^2 &\geq 0 \\
-x_1x_2 + x_4^2 + x_1 - x_4 - 1 &\geq 0 \\
x_4^3 + 4x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_4 - 2x_1 + 4x_4 &\geq 0 \\
\left.\begin{matrix} x_1x_2^3 - x_1x_2^2x_4 + 2x_2x_4^3 - 4x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_4 \\ -x_4^3 + 5x_2x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_4 - 4x_4^2 - 4x_4 \end{matrix}\right\} &\geq 0 \\
-x_2x_4^2 + x_1x_2 - 4x_2x_4 + 2x_4^2 - x_1 - 4x_2 + 3x_4 - 2 &\geq 0 \\
x_4 &\geq 10 \\
-x_4 &\geq -20 \\
x_2 - x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Paradoxe Grundidee: Hinzufügen roter Ungleichungen verkleinert eventuell die Lösungsmenge, aber erleichtert trotzdem, das Finden einer Lösung.

$$\begin{aligned}
x_1x_2^2 - x_4^2 &\geq 0\\
-x_1x_2 + x_4^2 + x_1 - x_4 - 1 &\geq 0\\
x_4^3 + 4x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_4 - 2x_1 + 4x_4 &\geq 0\\
\left.\begin{array}{r} x_1x_2^3 - x_1x_2^2x_4 + 2x_2x_4^3 - 4x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_4 \\ -x_4^3 + 5x_2x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_4 - 4x_4^2 - 4x_4 \end{array}\right\} &\geq 0\\
-x_2x_4^2 + x_1x_2 - 4x_2x_4 + 2x_4^2 - x_1 - 4x_2 + 3x_4 - 2 &\geq 0\\
x_4 &\geq 10\\
-x_4 &\geq -20\\
x_2 - x_3 &\geq 0\\
x_3 - x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Paradoxe Grundidee: Hinzufügen roter Ungleichungen verkleinert eventuell die Lösungsmenge, aber erleichtert trotzdem, das Finden einer Lösung.

$$
\begin{array}{rcl}
x_1x_2^2 - x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1x_2 + x_4^2 + x_1 - x_4 - 1 & \geq & 0 \\
x_4^3 + 4x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_4 - 2x_1 + 4x_4 & \geq & 0 \\
\left.\begin{array}{r} x_1x_2^3 - x_1x_2^2x_4 + 2x_2x_4^3 - 4x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_4 \\ -x_4^3 + 5x_2x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_4 - 4x_4^2 - 4x_4 \end{array}\right\} & \geq & 0 \\
-x_2x_4^2 + x_1x_2 - 4x_2x_4 + 2x_4^2 - x_1 - 4x_2 + 3x_4 - 2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$x_2 \geq \frac{3}{2}$$

$$
\begin{array}{rcl}
x_4 & \geq & 10 \\
-x_4 & \geq & -20 \\
x_2 - x_3 & \geq & 0 \\
x_3 - x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Paradoxe Grundidee: Hinzufügen roter Ungleichungen verkleinert eventuell die Lösungsmenge, aber erleichtert trotzdem, das Finden einer Lösung.

$$
\begin{aligned}
x_1x_2^2 - x_4^2 &\geq 0 \\
-x_1x_2 + x_4^2 + x_1 - x_4 - 1 &\geq 0 \\
x_4^3 + 4x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_4 - 2x_1 + 4x_4 &\geq 0 \\
\left.\begin{aligned} x_1x_2^3 - x_1x_2^2x_4 + 2x_2x_4^3 - 4x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_4 \\ -x_4^3 + 5x_2x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_4 - 4x_4^2 - 4x_4 \end{aligned}\right\} &\geq 0 \\
-x_2x_4^2 + x_1x_2 - 4x_2x_4 + 2x_4^2 - x_1 - 4x_2 + 3x_4 - 2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &\geq \tfrac{3}{2} \\
-x_2 &\geq -\tfrac{3}{2}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
x_4 &\geq 10 \\
-x_4 &\geq -20 \\
x_2 - x_3 &\geq 0 \\
x_3 - x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Paradoxe Grundidee: Hinzufügen roter Ungleichungen verkleinert eventuell die Lösungsmenge, aber erleichtert trotzdem, das Finden einer Lösung.

$$
\begin{aligned}
x_1x_2^2 - x_4^2 &\geq 0 \\
-x_1x_2 + x_4^2 + x_1 - x_4 - 1 &\geq 0 \\
x_4^3 + 4x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_4 - 2x_1 + 4x_4 &\geq 0 \\
\left.\begin{array}{r} x_1x_2^3 - x_1x_2^2x_4 + 2x_2x_4^3 - 4x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_4 \\ -x_4^3 + 5x_2x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_4 - 4x_4^2 - 4x_4 \end{array}\right\} &\geq 0 \\
-x_2x_4^2 + x_1x_2 - 4x_2x_4 + 2x_4^2 - x_1 - 4x_2 + 3x_4 - 2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
x_2 & \geq & \frac{3}{2} \\
-x_2 & \geq & -\frac{3}{2} \\
-x_1 & \geq & -110
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcl}
x_4 & \geq & 10 \\
-x_4 & \geq & -20 \\
x_2 - x_3 & \geq & 0 \\
x_3 - x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Paradoxe Grundidee: Hinzufügen roter Ungleichungen verkleinert eventuell die Lösungsmenge, aber erleichtert trotzdem, das Finden einer Lösung.

$$\begin{aligned}
x_1x_2^2 - x_4^2 &\geq 0\\
-x_1x_2 + x_4^2 + x_1 - x_4 - 1 &\geq 0\\
x_4^3 + 4x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_4 - 2x_1 + 4x_4 &\geq 0\\
\left.\begin{array}{r} x_1x_2^3 - x_1x_2^2x_4 + 2x_2x_4^3 - 4x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_4 \\ -x_4^3 + 5x_2x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_4 - 4x_4^2 - 4x_4 \end{array}\right\} &\geq 0\\
-x_2x_4^2 + x_1x_2 - 4x_2x_4 + 2x_4^2 - x_1 - 4x_2 + 3x_4 - 2 &\geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &\geq \tfrac{3}{2} & x_4 &\geq 10\\
-x_2 &\geq -\tfrac{3}{2} & -x_4 &\geq -20\\
-x_1 &\geq -110 & x_2 - x_3 &\geq 0\\
x_1 &\geq 110 & x_3 - x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Paradoxe Grundidee: Hinzufügen roter Ungleichungen verkleinert eventuell die Lösungsmenge, aber erleichtert trotzdem, das Finden einer Lösung.

$$
\begin{aligned}
x_1x_2^2 - x_4^2 &\geq 0\\
-x_1x_2 + x_4^2 + x_1 - x_4 - 1 &\geq 0\\
x_4^3 + 4x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_4 - 2x_1 + 4x_4 &\geq 0\\
\left.\begin{array}{r} x_1x_2^3 - x_1x_2^2x_4 + 2x_2x_4^3 - 4x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_4 \\ -x_4^3 + 5x_2x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_4 - 4x_4^2 - 4x_4 \end{array}\right\} &\geq 0\\
-x_2x_4^2 + x_1x_2 - 4x_2x_4 + 2x_4^2 - x_1 - 4x_2 + 3x_4 - 2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &\geq \tfrac{3}{2} & x_4 &\geq 10\\
-x_2 &\geq -\tfrac{3}{2} & -x_4 &\geq -20\\
-x_1 &\geq -110 & x_2 - x_3 &\geq 0\\
x_1 &\geq 110 & x_3 - x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Ungleichungssystem entnommen aus Jürgen Garloff: Anwendung der Bernstein-Entwicklung horizonte, Ausgabe 18, `http://www.koord.fh-mannheim.de/horizonte/index3.html`

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Voraussetzung ist, daß $-1 \geq 0$ keine blaue Ungleichung ist.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Voraussetzung ist, daß $-1 \geq 0$ keine blaue Ungleichung ist. Das bedeutet für uns, daß Hoffnung auf Lösbarkeit besteht.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Voraussetzung ist, daß $-1 \geq 0$ keine blaue Ungleichung ist. Das bedeutet für uns, daß Hoffnung auf Lösbarkeit besteht. Diese Hoffnung sollte natürlich durch Hinzufügen roter Ungleichungen nicht zerstört werden.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Voraussetzung ist, daß $-1 \geq 0$ keine blaue Ungleichung ist. Das bedeutet für uns, daß Hoffnung auf Lösbarkeit besteht. Diese Hoffnung sollte natürlich durch Hinzufügen roter Ungleichungen nicht zerstört werden. Deswegen fügen wir eine rote Ungleichung nur dann dazu, wenn dies nicht zu einer blauen Ungleichung $-1 \geq 0$ führt.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Voraussetzung ist, daß $-1 \geq 0$ keine blaue Ungleichung ist. Das bedeutet für uns, daß Hoffnung auf Lösbarkeit besteht. Diese Hoffnung sollte natürlich durch Hinzufügen roter Ungleichungen nicht zerstört werden. Deswegen fügen wir eine rote Ungleichung nur dann dazu, wenn dies nicht zu einer blauen Ungleichung $-1 \geq 0$ führt. Man kann zeigen, daß man unter Einhaltung dieser Regeln für jedes Polynom p immer $p \geq 0$ oder $-p \geq 0$ hinzufügen kann.

Jean-Louis Krivine

Der Zauberer

Voraussetzung ist, daß $-1 \geq 0$ keine blaue Ungleichung ist. Das bedeutet für uns, daß Hoffnung auf Lösbarkeit besteht. Diese Hoffnung sollte natürlich durch Hinzufügen roter Ungleichungen nicht zerstört werden. Deswegen fügen wir eine rote Ungleichung nur dann dazu, wenn dies nicht zu einer blauen Ungleichung $-1 \geq 0$ führt. Man kann zeigen, daß man unter Einhaltung dieser Regeln für jedes Polynom p immer $p \geq 0$ oder $-p \geq 0$ hinzufügen kann.

Anneaux préordonnés
http://www.pps.jussieu.fr/~krivine/articles/Anneaux_preordonnes.pdf

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$\begin{array}{rcrcrcrcc}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0
\end{array}$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
x_1^8x_2^4 & - & x_2^3x_4^3 & + & x_2x_4^2 & - & 2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$\begin{array}{rcrcrcrcc}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
x_1^8x_2^4 & - & x_2^3x_4^3 & + & x_2x_4^2 & - & 2 & \geq & 0 \\
x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0
\end{array}$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$\begin{array}{rcrcrcrcc}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
x_1^8x_2^4 & - & x_2^3x_4^3 & + & x_2x_4^2 & - & 2 & \geq & 0 \\
x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 \\
5x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \dots & \geq & 0
\end{array}$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
x_1^8x_2^4 & - & x_2^3x_4^3 & + & x_2x_4^2 & - & 2 & \geq & 0 \\
x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 \\
5x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \dots & \geq & 0 \\
x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
x_1^8x_2^4 & - & x_2^3x_4^3 & + & x_2x_4^2 & - & 2 & \geq & 0 \\
x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 \\
5x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \ldots & \geq & 0 \\
x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \ldots & \geq & 0 \\
x_1x_2^2 & - & 9x_1x_2^4 & - & 3x_2^3 & + & \ldots & \geq & 0
\end{array}$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
x_1^8x_2^4 & - & x_2^3x_4^3 & + & x_2x_4^2 & - & 2 & \geq & 0 \\
x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 \\
5x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \dots & \geq & 0 \\
x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 \\
x_1x_2^2 & - & 9x_1x_2^4 & - & 3x_2^3 & + & \dots & \geq & 0 \\
 & & & & & & -1 & \geq & 0 \quad \lightning
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
\pm\, x_1^8x_2^4 & \mp & x_2^3x_4^3 & \pm & x_2x_4^2 & \mp & 2 & \geq & 0 \\
x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 \\
5x_1^2 & + & 6x_2^4 & - & x_1x_2 & + & \dots & \geq & 0 \\
x_1^2x_2^2 & + & \frac{1}{2}x_1x_2^3 & - & 3x_2^6 & + & \dots & \geq & 0 \\
x_1x_2^2 & - & 9x_1x_2^4 & - & 3x_2^3 & + & \dots & \geq & 0 \\
 & & & & & & -1 & \geq & 0 \quad \lightning
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$\begin{array}{rcrcrcrcc}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-\,x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0
\end{array}$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
-x_1x_3^3 & - & x_1^2x_4^3 & - & 2x_1x_4 & + & 2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcc}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
-x_1x_3^3 & - & x_1^2x_4^3 & - & 2x_1x_4 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
-x_1x_3^3 & - & x_1^2x_4^3 & - & 2x_1x_4 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 \\
x_1x_2^2 & - & 9x_1x_2^4 & - & 3x_2^3 & + & \ldots & \geq & 0
\end{array}$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-\, x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
-\, x_1x_3^3 & - & x_1^2x_4^3 & - & 2x_1x_4 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 \\
x_1x_2^2 & - & 9x_1x_2^4 & - & 3x_2^3 & + & \ldots & \geq & 0 \\
6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18x_1x_2^2 & + & \ldots & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-\,x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
-\,x_1x_3^3 & - & x_1^2x_4^3 & - & 2x_1x_4 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 \\
x_1x_2^2 & - & 9x_1x_2^4 & - & 3x_2^3 & + & \dots & \geq & 0 \\
6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18x_1x_2^2 & + & \dots & \geq & 0 \\
-\,x_1^4x_2 & + & 3x_2x_4^3 & + & x_1^2x_2 & + & \dots & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcc}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
-x_1x_3^3 & - & x_1^2x_4^3 & - & 2x_1x_4 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \dots & \geq & 0 \\
x_1x_2^2 & - & 9x_1x_2^4 & - & 3x_2^3 & + & \dots & \geq & 0 \\
6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18x_1x_2^2 & + & \dots & \geq & 0 \\
-x_1^4x_2 & + & 3x_2x_4^3 & + & x_1^2x_2 & + & \dots & \geq & 0 \\
 & & & & & & -1 & \geq & 0 \quad ↯
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcc}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-\,x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
\mp\,x_1x_3^3 & \mp & x_1^2x_4^3 & \mp & 2x_1x_4 & \pm & 2 & \geq & 0 \\
x_1^2x_2 & - & 6x_1x_2^2 & - & 2x_1^2x_2^7 & - & \ldots & \geq & 0 \\
x_1x_2^2 & - & 9x_1x_2^4 & - & 3x_2^3 & + & \ldots & \geq & 0 \\
6x_1^2x_2 & - & 6x_1^3x_2 & + & 18x_1x_2^2 & + & \ldots & \geq & 0 \\
-\,x_1^4x_2 & + & 3x_2x_4^3 & + & x_1^2x_2 & + & \ldots & \geq & 0 \\
 & & & & & & -1 & \geq & 0 \quad ↯
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcc}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0\\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0\\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0\\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0\\
-\,x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0\\
x_1x_3^3 & + & x_1^2x_4^3 & + & 2x_1x_4 & - & 2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcc}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-\,x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1x_3^3 & + & x_1^2x_4^3 & + & 2x_1x_4 & - & 2 & \geq & 0 \\
3x_2^3x_3 & + & x_2x_3x_4 & - & x_4^7 & - & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcc}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1x_3^3 & + & x_1^2x_4^3 & + & 2x_1x_4 & - & 2 & \geq & 0 \\
3x_2^3x_3 & + & x_2x_3x_4 & - & x_4^7 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & - & x_2^4 & + & x_3^4 & - & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \ldots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-\,x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1x_3^3 & + & x_1^2x_4^3 & + & 2x_1x_4 & - & 2 & \geq & 0 \\
3x_2^3x_3 & + & x_2x_3x_4 & - & x_4^7 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & - & x_2^4 & + & x_3^4 & - & x_4 & \geq & 0 \\
-\,x_2^3x_2 & + & 3x_2x_4^3 & + & 2x_1^2x_2 & + & \ldots & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcc}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-\,x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1x_3^3 & + & x_1^2x_4^3 & + & 2x_1x_4 & - & 2 & \geq & 0 \\
3x_2^3x_3 & + & x_2x_3x_4 & - & x_4^7 & - & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1x_3^3 & + & x_1^2x_4^3 & + & 2x_1x_4 & - & 2 & \geq & 0 \\
3x_2^3x_3 & + & x_2x_3x_4 & - & x_4^7 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-\,x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1x_3^3 & + & x_1^2x_4^3 & + & 2x_1x_4 & - & 2 & \geq & 0 \\
3x_2^3x_3 & + & x_2x_3x_4 & - & x_4^7 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & & & & -x_1 & + & 5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-\,x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1x_3^3 & + & x_1^2x_4^3 & + & 2x_1x_4 & - & 2 & \geq & 0 \\
3x_2^3x_3 & + & x_2x_3x_4 & - & x_4^7 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & & & & -x_1 & + & 5 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & \dots & \\
 & & & & & & & \dots & \\
 & & & & & & & \dots &
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-\,x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1x_3^3 & + & x_1^2x_4^3 & + & 2x_1x_4 & - & 2 & \geq & 0 \\
3x_2^3x_3 & + & x_2x_3x_4 & - & x_4^7 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1x_3^3 & + & x_1^2x_4^3 & + & 2x_1x_4 & - & 2 & \geq & 0 \\
3x_2^3x_3 & + & x_2x_3x_4 & - & x_4^7 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcc}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1x_3^3 & + & x_1^2x_4^3 & + & 2x_1x_4 & - & 2 & \geq & 0 \\
3x_2^3x_3 & + & x_2x_3x_4 & - & x_4^7 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 5 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcc}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-\,x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1x_3^3 & + & x_1^2x_4^3 & + & 2x_1x_4 & - & 2 & \geq & 0 \\
3x_2^3x_3 & + & x_2x_3x_4 & - & x_4^7 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 5 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 6 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 7 & \geq & 0
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

$$
\begin{array}{rcrcrcrcc}
2x_1x_2 & + & 6x_2^2 & - & x_2x_3^3 & + & x_2^3x_4^2 & \geq & 0 \\
-x_1 & - & x_1x_2^6 & - & x_3 & + & 7x_4 & \geq & 0 \\
7x_1x_2x_4^2 & - & \frac{1}{2}x_2^2 & + & x_1x_3^2 & - & \dots & \geq & 0 \\
3x_1 & + & 6x_2x_3^4 & + & x_1x_3 & - & 3 & \geq & 0 \\
-\,x_1^8x_2^4 & + & x_2^3x_4^3 & - & x_2x_4^2 & + & 2 & \geq & 0 \\
x_1x_3^3 & + & x_1^2x_4^3 & + & 2x_1x_4 & - & 2 & \geq & 0 \\
3x_2^3x_3 & + & x_2x_3x_4 & - & x_4^7 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 4 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 5 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 6 & \geq & 0 \\
 & & & & x_1 & - & 7 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & \dots &
\end{array}
$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

So fügt man rote Ungleichungen dazu, bis für jedes Polynom p mindestens eine der Ungleichungen $p \geq 0$ oder $-p \geq 0$.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

So fügt man rote Ungleichungen dazu, bis für jedes Polynom p mindestens eine der Ungleichungen $p \geq 0$ oder $-p \geq 0$.

Problem: Es gibt soviele Polynome, daß man sie gar nicht alle mit natürlichen Zahlen durchnumerieren kann.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

So fügt man rote Ungleichungen dazu, bis für jedes Polynom p mindestens eine der Ungleichungen $p \geq 0$ oder $-p \geq 0$.

Problem: Es gibt soviele Polynome, daß man sie gar nicht alle mit natürlichen Zahlen durchnumerieren kann. Kommt dann jedes Polynom überhaupt an die Reihe?

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

So fügt man rote Ungleichungen dazu, bis für jedes Polynom p mindestens eine der Ungleichungen $p \geq 0$ oder $-p \geq 0$.

Problem: Es gibt soviele Polynome, daß man sie gar nicht alle mit natürlichen Zahlen durchnumerieren kann. Kommt dann jedes Polynom überhaupt an die Reihe?

Lösung: Numeriere die Polynome mit Ordinalzahlen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, $\ldots$,

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

So fügt man rote Ungleichungen dazu, bis für jedes Polynom p mindestens eine der Ungleichungen $p \geq 0$ oder $-p \geq 0$.

Problem: Es gibt soviele Polynome, daß man sie gar nicht alle mit natürlichen Zahlen durchnumerieren kann. Kommt dann jedes Polynom überhaupt an die Reihe?

Lösung: Numeriere die Polynome mit Ordinalzahlen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, $\ldots$,, ω, $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, $\ldots$,

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

So fügt man rote Ungleichungen dazu, bis für jedes Polynom p mindestens eine der Ungleichungen $p \geq 0$ oder $-p \geq 0$.

Problem: Es gibt soviele Polynome, daß man sie gar nicht alle mit natürlichen Zahlen durchnumerieren kann. Kommt dann jedes Polynom überhaupt an die Reihe?

Lösung: Numeriere die Polynome mit Ordinalzahlen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, $\ldots$,, ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, $\ldots$,2ω, $2\omega + 1$, $\ldots$,

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

So fügt man rote Ungleichungen dazu, bis für jedes Polynom p mindestens eine der Ungleichungen $p \geq 0$ oder $-p \geq 0$.

Problem: Es gibt soviele Polynome, daß man sie gar nicht alle mit natürlichen Zahlen durchnumerieren kann. Kommt dann jedes Polynom überhaupt an die Reihe?

Lösung: Numeriere die Polynome mit Ordinalzahlen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, $\ldots$,, ω, $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, $\ldots$,2ω, $2\omega+1$, $\ldots$,ω^2, ω^2+1, $\ldots$,

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

So fügt man rote Ungleichungen dazu, bis für jedes Polynom p mindestens eine der Ungleichungen $p \geq 0$ oder $-p \geq 0$.

Problem: Es gibt soviele Polynome, daß man sie gar nicht alle mit natürlichen Zahlen durchnumerieren kann. Kommt dann jedes Polynom überhaupt an die Reihe?

Lösung: Numeriere die Polynome mit Ordinalzahlen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, $\ldots$,, ω, $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, $\ldots$,2ω, $2\omega+1$, $\ldots$,ω^2, ω^2+1, $\ldots$,$\omega^2+\omega$, $\omega^2+\omega+1$, $\ldots$,

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

So fügt man rote Ungleichungen dazu, bis für jedes Polynom p mindestens eine der Ungleichungen $p \geq 0$ oder $-p \geq 0$.

Problem: Es gibt soviele Polynome, daß man sie gar nicht alle mit natürlichen Zahlen durchnumerieren kann. Kommt dann jedes Polynom überhaupt an die Reihe?

Lösung: Numeriere die Polynome mit Ordinalzahlen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, $\dots$,, ω, $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, $\dots$,2ω, $2\omega+1$, $\dots$,ω^2, ω^2+1, $\dots$,$\omega^2+\omega$, $\omega^2+\omega+1$, $\dots$,ω^3, $\dots$,

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

So fügt man rote Ungleichungen dazu, bis für jedes Polynom p mindestens eine der Ungleichungen $p \geq 0$ oder $-p \geq 0$.

Problem: Es gibt soviele Polynome, daß man sie gar nicht alle mit natürlichen Zahlen durchnumerieren kann. Kommt dann jedes Polynom überhaupt an die Reihe?

Lösung: Numeriere die Polynome mit Ordinalzahlen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, $\ldots$,, ω, $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, $\ldots$,2ω, $2\omega+1$, $\ldots$,ω^2, ω^2+1, $\ldots$,$\omega^2+\omega$, $\omega^2+\omega+1$, $\ldots$,ω^3, $\ldots$,ω^4, ω^4+1, $\ldots$,

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

So fügt man rote Ungleichungen dazu, bis für jedes Polynom p mindestens eine der Ungleichungen $p \geq 0$ oder $-p \geq 0$.

Problem: Es gibt soviele Polynome, daß man sie gar nicht alle mit natürlichen Zahlen durchnumerieren kann. Kommt dann jedes Polynom überhaupt an die Reihe?

Lösung: Numeriere die Polynome mit Ordinalzahlen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, $\ldots$,, ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, $\ldots$,2ω, $2\omega + 1$, $\ldots$,ω^2, $\omega^2 + 1$, $\ldots$,$\omega^2 + \omega$, $\omega^2 + \omega + 1$, $\ldots$,ω^3, $\ldots$,ω^4, $\omega^4 + 1$, $\ldots$,ω^ω, $\ldots$,

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

So fügt man rote Ungleichungen dazu, bis für jedes Polynom p mindestens eine der Ungleichungen $p \geq 0$ oder $-p \geq 0$.

Problem: Es gibt soviele Polynome, daß man sie gar nicht alle mit natürlichen Zahlen durchnumerieren kann. Kommt dann jedes Polynom überhaupt an die Reihe?

Lösung: Numeriere die Polynome mit Ordinalzahlen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, $\ldots$,, ω, $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, $\ldots$,2ω, $2\omega+1$, $\ldots$,ω^2, ω^2+1, $\ldots$,$\omega^2+\omega$, $\omega^2+\omega+1$, $\ldots$,ω^3, $\ldots$,ω^4, ω^4+1, $\ldots$,ω^ω, $\ldots$,ω_1, ω_1+1, $\ldots$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Wenn man Glück hat kann man nach Hinzufügen aller roten Ungleichungen eine eindeutige Lösung ablesen, zum Beispiel an den acht roten Ungleichungen

$$\frac{3}{2} \leq x_1 \leq \frac{3}{2},\ 8 \leq x_2 \leq 8,\ -3 \leq x_3 \leq -3,\ 0 \leq x_4 \leq 0.$$

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Wenn man Glück hat kann man nach Hinzufügen aller roten Ungleichungen eine eindeutige Lösung ablesen, zum Beispiel an den acht roten Ungleichungen

$$\frac{3}{2} \le x_1 \le \frac{3}{2},\ 8 \le x_2 \le 8,\ -3 \le x_3 \le -3,\ 0 \le x_4 \le 0.$$

Man muß aber noch zeigen, daß dies tatsächlich eine Lösung ist.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Wenn man Glück hat kann man nach Hinzufügen aller roten Ungleichungen eine eindeutige Lösung ablesen, zum Beispiel an den acht roten Ungleichungen

$$\frac{3}{2} \leq x_1 \leq \frac{3}{2},\; 8 \leq x_2 \leq 8,\; -3 \leq x_3 \leq -3,\; 0 \leq x_4 \leq 0.$$

Man muß aber noch zeigen, daß dies tatsächlich eine Lösung ist. Dies ist aber nicht unglaublich schwierig.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Wenn man Pech hat dann wurden zum Beispiel die unendlich vielen roten Ungleichungen

$$x_1 \geq 0,\; x_1 \geq 1,\; x_1 \geq 2,\; x_1 \geq 3,\; \dots$$

hinzugefügt,

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Wenn man Pech hat dann wurden zum Beispiel die unendlich vielen roten Ungleichungen

$$x_1 \geq 0,\ x_1 \geq 1,\ x_1 \geq 2,\ x_1 \geq 3,\ \ldots$$

hinzugefügt, welche die Existenz einer reellen Lösung ausschließen.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Wenn man Pech hat dann wurden zum Beispiel die unendlich vielen roten Ungleichungen

$$x_1 \geq 0, \; x_1 \geq 1, \; x_1 \geq 2, \; x_1 \geq 3, \; \ldots$$

hinzugefügt, welche die Existenz einer reellen Lösung ausschließen. Haben wirs vergeigt?

Nein! Jetzt hilft nur noch reelle Algebra.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Wenn man Pech hat dann wurden zum Beispiel die unendlich vielen roten Ungleichungen

$$x_1 \geq 0,\ x_1 \geq 1,\ x_1 \geq 2,\ x_1 \geq 3,\ \dots$$

hinzugefügt, welche die Existenz einer reellen Lösung ausschließen. Haben wirs vergeigt?

Nein! Jetzt hilft nur noch reelle Algebra. Man konstruiert jetzt aus der Information, die in den roten Ungleichungen steckt, einen neuen Zahlbereich, der die reellen Zahlen erweitert,

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Wenn man Pech hat dann wurden zum Beispiel die unendlich vielen roten Ungleichungen

$$x_1 \geq 0,\ x_1 \geq 1,\ x_1 \geq 2,\ x_1 \geq 3,\ \ldots$$

hinzugefügt, welche die Existenz einer reellen Lösung ausschließen. Haben wirs vergeigt?

Nein! Jetzt hilft nur noch reelle Algebra. Man konstruiert jetzt aus der Information, die in den roten Ungleichungen steckt, einen neuen Zahlbereich, der die reellen Zahlen erweitert, aber bezüglich $+$, $\cdot$ und $\leq$ dieselben algebraischen Eigenschaften hat

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Wenn man Pech hat dann wurden zum Beispiel die unendlich vielen roten Ungleichungen

$$x_1 \geq 0,\ x_1 \geq 1,\ x_1 \geq 2,\ x_1 \geq 3,\ \dots$$

hinzugefügt, welche die Existenz einer reellen Lösung ausschließen. Haben wirs vergeigt?

Nein! Jetzt hilft nur noch reelle Algebra. Man konstruiert jetzt aus der Information, die in den roten Ungleichungen steckt, einen neuen Zahlbereich, der die reellen Zahlen erweitert, aber bezüglich $+$, $\cdot$ und $\leq$ dieselben algebraischen Eigenschaften hat und in dem es Elemente gibt, die größer als jede natürliche Zahl sind,

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Wenn man Pech hat dann wurden zum Beispiel die unendlich vielen roten Ungleichungen

$$x_1 \geq 0, \; x_1 \geq 1, \; x_1 \geq 2, \; x_1 \geq 3, \; \ldots$$

hinzugefügt, welche die Existenz einer reellen Lösung ausschließen. Haben wirs vergeigt?

Nein! Jetzt hilft nur noch reelle Algebra. Man konstruiert jetzt aus der Information, die in den roten Ungleichungen steckt, einen neuen Zahlbereich, der die reellen Zahlen erweitert, aber bezüglich $+$, $\cdot$ und $\leq$ dieselben algebraischen Eigenschaften hat und in dem es Elemente gibt, die größer als jede natürliche Zahl sind, mehr noch, in dem sogar das um die roten Ungleichungen erweiterte Ungleichungssystem eine Lösung besitzt.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Wenn man Pech hat dann wurden zum Beispiel die unendlich vielen roten Ungleichungen

$$x_1 \geq 0, \; x_1 \geq 1, \; x_1 \geq 2, \; x_1 \geq 3, \; \ldots$$

hinzugefügt, welche die Existenz einer reellen Lösung ausschließen. Haben wirs vergeigt?

Nein! Jetzt hilft nur noch reelle Algebra. Man konstruiert jetzt aus der Information, die in den roten Ungleichungen steckt, einen neuen Zahlbereich, der die reellen Zahlen erweitert, aber bezüglich $+$, $\cdot$ und $\leq$ dieselben algebraischen Eigenschaften hat und in dem es Elemente gibt, die größer als jede natürliche Zahl sind, mehr noch, in dem sogar das um die roten Ungleichungen erweiterte Ungleichungssystem eine Lösung besitzt. Da die Lösbarkeit eines endlichen Ungleichungssystems eine algebraische Eigenschaft ist, hat das ursprüngliche System eine reelle Lösung.

Der Beweis von Krivine

Das Schmankerl

Wenn man Pech hat dann wurden zum Beispiel die unendlich vielen roten Ungleichungen

$$x_1 \geq 0, \; x_1 \geq 1, \; x_1 \geq 2, \; x_1 \geq 3, \; \ldots$$

hinzugefügt, welche die Existenz einer reellen Lösung ausschließen. Haben wirs vergeigt?

Nein! Jetzt hilft nur noch reelle Algebra. Man konstruiert jetzt aus der Information, die in den roten Ungleichungen steckt, einen neuen Zahlbereich, der die reellen Zahlen erweitert, aber bezüglich $+$, $\cdot$ und $\leq$ dieselben algebraischen Eigenschaften hat und in dem es Elemente gibt, die größer als jede natürliche Zahl sind, mehr noch, in dem sogar das um die roten Ungleichungen erweiterte Ungleichungssystem eine Lösung besitzt. Da die Lösbarkeit eines endlichen Ungleichungssystems eine algebraische Eigenschaft ist, hat das ursprüngliche System eine reelle Lösung. Quod esset demonstrandum.