

Universität Konstanz

**Tandemlösung
im Rahmen des Programms
„Freiräume für Kreativität“**

27. August 2010

Tandempartner: Igor Klep

Genehmigte Stelle: Gastprofessur für Igor Klep**Fachbereich: Mathematik und Statistik****Zeitraum: 1. Februar bis 30. September 2011**

Zusammenfassung

Im Rahmen des Programms „Freiräume für Kreativität“ wurde am 18. August 2010 die Finanzierung einer W3-Stelle für Herrn Igor Klep vom 1. Februar bis 30. September 2011 zur Bildung eines Forschungs- und Lehr tandems mit mir zugesagt. Ziel des Aufenthalts ist es, unsere Ideen zu dem im Entstehen begriffenen Gebiet „Freie Positivität“ zu präzisieren und zu verfolgen, sowie einen dementsprechenden Antrag auf ein in Konstanz lokalisiertes ERC-Starting-Grant vorzubereiten.

Arbeitsvorhaben

In den letzten Jahren haben drei sich gegenseitig aufschaukelnde mathematische Entwicklungen eine starke Motivation geschaffen, verschiedene Positivitätsbegriffe in nichtkommutativen freien Algebren zu studieren.

Erstens konnten einige sehr bekannte und seit langer Zeit offene Probleme aus der Operatortheorie auf rein algebraisch gestellte Positivitätsfragen in freien Algebren reduziert werden. Zu nennen sind hier vor allem das Einbettungsproblem von Alain Connes aus der Theorie der Von-Neumann-Algebren und die Vermutung von Bessis, Moussa und Villani, die der statistischen Quantenmechanik entsprang. Beide sind seit 1975/76 offen und widersetzen sich seither zahlreichen Lösungsversuchen.

Zweitens wurden einschlägige Ergebnisse zur Existenz algebraischer Positivitätszertifikate für Polynome in nichtkommutierenden Variablen erzielt. Hierbei handelt es sich typischerweise um Darstellungen mit Hilfe von Summen hermitescher Quadrate. Diese Darstellungen sind durch die besser bekannten Quadratsummendarstellungen im kommutativen Fall inspiriert, welche durch Artins Lösung des 17. Hilbertschen Problems wohlbekannt sind und in den letzten zwanzig Jahren selber entscheidend verfeinert wurden.

Drittens hat man verstanden, daß mit numerischen Methoden effizient nach diesen neuartigen Positivitätszertifikaten gesucht werden kann. Durch geeignete Rundungstechniken können

dabei in vielen Fällen die durch Gleitkommaarithmetik erzielten Ergebnisse zu exakten algebraischen Zertifikaten gemacht werden. Dieser algorithmische Zugang basiert vor allem auf Semidefiniter Programmierung, einer Verallgemeinerung von Linearer Programmierung.

Ein Ziel des Forschungsaufenthalts von Igor Klep ist es, diese drei Forschungsrichtungen noch besser miteinander zu verbinden und sie in einem neuartigen algebraischen Licht zu betrachten. Die Hauptidee ist es, die freien Algebren durch geeignete Quotienten zu ersetzen (etwa Ringe generischer Matrizen oder andere PI-Algebren), auf denen man sehr viel mächtigere algebraische Werkzeuge zur Verfügung hat. Auf diesem Weg könnte man algebraische Analogie zu bekannten analytischen Fragestellungen formulieren und beweisen.

Die Motivation für diese algebraischen Analogie besteht darin, daß die so erhaltenen algebraischen Beweise als direkte Hilfsmittel oder als entscheidende Beweisideen für die ursprünglichen operatortheoretischen Probleme dienen könnten. Das letztendliche Ziel wäre es, auf diese Weise eines der ursprünglichen Probleme zu lösen. Man kann davon ausgehen, daß diese Vorgehensweise zur Identifizierung und zum Studium neuer interessanter algebraischer Strukturen führt, die derzeit noch hinter funktionalanalytischen Problemen verborgen liegen.

Profil von Igor Klep

Igor Klep hat bereits an die 30 Artikel in soliden Zeitschriften veröffentlicht. Einige seiner Arbeiten erschienen in so angesehenen Journalen wie *Advances in Mathematics*, *Algebras and Representation Theory* und *Proceedings of the American Mathematical Society*. Andere finden sich in so verschiedenen Fachzeitschriften wie *Journal of Algebra*, *Journal of Functional Analysis* und *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, was sein breites innermathematisches Spektrum verdeutlicht. Selbst in Zeitschriften, die im Grenzbereich zu Mathematik liegen, wie *Journal of Mathematical Chemistry* und *Journal of Statistical Physics* hat er schon wichtige Beiträge geliefert.

Herr Klep ist ein weltweit angesehener Experte für nichtkommutative Algebra mit einer Spezialisierung auf Bewertungstheorie und Positivitätsfragen. Seine Interessen stimmen recht gut mit den Hauptthemen des hiesigen Schwerpunkts „Reelle Geometrie und Algebra“ überein, wobei er aber durch die Behandlung nichtkommutativer Strukturen einen neuartigen und vielversprechenden Aspekt in den Schwerpunkt hineinträgt.