POLYNÔMES POSITIFS NON COMMUTATIFS

par

Igor Klep & Markus Schweighofer

Résumé. — Dans [**Co**], Alain Connes demande si tout facteur de type II_1 se plonge dans une ultrapuissance du facteur hyperfini du type II_1. Dans la publication conjointe [**KS2**], les investigateurs principaux (IP), du côté slovène et français, ont obtenu une reformulation algébrique de cette question qui demande si tout polynôme en variables non commutatives (NC) de trace positif sur un hypercube non commutatif s'écrit comme somme de carrés hermitiens de polynômes. L'existence de ces représentations peut-être étudiée par la technique de la programmation semidéfinie (PSD).

Le but de ce projet est de développer les outils nécessaires pour s'attaquer à la conjecture de cette perspective algébrique. Comme l'anneau de polynômes NC (c.-à-d. l'algèbre libre) se plonge dans une limite projective d'anneaux de matrices dites génériques, nous allons étudier des certificats de positivité similaires pour des matrices génériques dans l'esprit de Procesi et Schacher [**PS**].

Description du projet. — Soit R un anneau associatif unitaire avec involution $a \mapsto a^*$. Dénotons le sous-group de ses éléments *symétriques* par

$$\operatorname{Sym} R = \{a \in R \mid a = a^*\}.$$

On appelle *carré hermitien* ou *commutateur* un élément de la forme a^*a ou $ab - ba$ ($a,b \in R$), respectivement. Munissons R d'une relation d'équivalence définie par $a \sim b$ ssi $a - b$ est une somme de commutateurs dans R ($a,b \in R$). Nous considérons les ensembles

$$\Sigma^2 R := \{\sum_i a_i^* a_i \mid a_i \in R\} \subseteq \operatorname{Sym} R \qquad \text{et} \qquad \Theta^2 R := \{a \in R \mid \exists b \in \Sigma^2 R : a \sim b\}.$$

L'exemple motivant les problèmes que nous allons aborder est $R = \mathbb{R}^{s \times s}$ muni de la transposition de matrices. On voit facilement que pour tout $A \in \operatorname{Sym} \mathbb{R}^{s \times s}$:

(A) A est semidéfini positif (SDP) $\Leftrightarrow A \in \Sigma^2 \mathbb{R}^{s \times s}$;

(B) A est non semidéfini négatif (NSDN) $\Leftrightarrow$
il existe $B_i \in \mathbb{R}^{s \times s}$ tel que $\sum_i B_i^* A B_i \in 1 + \Sigma^2 \mathbb{R}^{s \times s}$;

(C) $\operatorname{tr}(A) = 0 \Leftrightarrow A \sim 0$ dans $\mathbb{R}^{s\times s}$;

(D) $\operatorname{tr}(A) \geq 0 \Leftrightarrow A \in \Theta^2\mathbb{R}^{s\times s}$.

Notre projet cherche à trouver des entrées similaires dans le dictionnaire algébro-géométrique pour des anneaux non commutatifs autre que $R = \mathbb{R}^{s\times s}$.

Par exemple, considérons l'anneau $R = \mathbb{R}\langle \bar{X}\rangle$ de polynômes NC. Soient $\bar{X} := (X_1,\dots,X_n)$ des variables (ou symboles) et $\langle \bar{X}\rangle$ le semi-groupe engendré librement par $\bar{X}$ dont les éléments sont des mots formés de n lettres $X_1,\dots,X_n$ (y compris le mot vide 1). Désignons par $\mathbb{R}\langle \bar{X}\rangle$ la $\mathbb{R}$-algèbre attachée à $\langle \bar{X}\rangle$, c'est-à-dire la $\mathbb{R}$-algèbre associative libre sur $\bar{X}$ qui regroupe les polynômes en n variables non-commutantes $\bar{X}$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Munissons cet anneau par l'involution $p \mapsto p^*$ donnée par $X_i^* = X_i$ et $a^* = a$ pour $a \in \mathbb{R}$. Pour tout mot $w \in \langle \bar{X}\rangle$, w^* est donc le mot inverse.

Le théorème de Helton [**He**] sur les sommes de carrés hermitiens est une version globale de (A) :

***Théorème* (Helton).** — *Soit $f \in \operatorname{Sym}\mathbb{R}\langle \bar{X}\rangle$. Alors $f(A_1,\dots,A_n)$ est SDP pour tout $s \in \mathbb{N}$ et $A_1,\dots,A_n \in \operatorname{Sym}\mathbb{R}^{s\times s}$ ssi $f \in \Sigma^2\mathbb{R}\langle \bar{X}\rangle$.*

De la même manière, une version globale de (B) se lit comme suit :

***Théorème* (Cimprič [Ci] ; Klep, Schweighofer [KS1])**

Pour tout $f \in \operatorname{Sym}\mathbb{R}\langle \bar{X}\rangle$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *$f(A_1,\dots,A_n)$ est NSDN pour tout $s \in \mathbb{N}$ et $A_1,\dots,A_n \in \operatorname{Sym}\mathbb{R}^{s\times s}$ avec $\|A_i\| \leq 1$ pour tout i ;*

(ii) *Il existe $g_i \in \mathbb{R}\langle \bar{X}\rangle$ tel que $\sum_i g_i^* f g_i \in 1 + \mathcal{M}$, où*

$$\mathcal{M} := \{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j} h_{ij}^*(1 - X_i)^2 h_{ij} \mid h_{ij} \in \mathbb{R}\langle \bar{X}\rangle\}$$

et $X_0 := 0$.

On procède avec la variante suivante (C) :

***Théorème* (Klep, Schweighofer [KS2]).** — *Soit $f \in \operatorname{Sym}\mathbb{R}\langle \bar{X}\rangle$. Alors $\operatorname{tr} f(A_1,\dots,A_n) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{N}$ et $A_1,\dots,A_n \in \operatorname{Sym}\mathbb{R}^{s\times s}$ ssi $f \sim 0$.*

Alors que l'énoncé analogue pour (D) n'est pas vrai, il y a la version suivante sur l'hypercube NC avec des algèbres de von Neumann.

***Théorème* (Klep, Schweighofer [KS2]).** — *Pour tout $f \in \operatorname{Sym}\mathbb{R}\langle \bar{X}\rangle$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\tau(f(A_1,\dots,A_n)) \geq 0$ pour tout facteur II_1 separable $\mathcal{F}$ avec trace τ et toutes contractions $A_1,\dots,A_n \in \operatorname{Sym}\mathcal{F}$;*

(ii) *Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, il existe $g \in \mathcal{M}$ tel que $f + \varepsilon \sim g$.*

Nous avons montré que la version matricielle suivante de cet énoncé est équivalente au problème très important de Connes [**Co**] mentionné dans le résumé.

Problème ouvert **(Klep, Schweighofer [KS2]).** — *Les conditions suivantes, sont-elles équivalentes pour tout* $f \in \operatorname{Sym}\mathbb{R}\langle\bar{X}\rangle$?

(i) $\operatorname{tr}(f(A_1,\dots,A_n)) \geq 0$ *pour tout* $s \in \mathbb{N}$ *et toutes les contractions* $A_1,\dots,A_n \in \operatorname{Sym}\mathbb{R}^{s\times s}$;

(ii) *Pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$*, il existe* $g \in \mathcal{M}$ *tel que* $f + \varepsilon \sim g$.

De la même manière que dans [**KS3**], on peut chercher des certificats de positivité comme dans (ii) en utilisant la PSD. Pour la conjecture de BMV mentionnée plus haut, cette approche a déjà conduit à un progrès substantiel [**KS3, Bu**]. En fait, on a trouvé toute une famille des polynômes NC dont on sait qu'ils satisfont (i) mais dont on ignore s'ils remplissent (ii). L'approche par PDS peut sans doute augmenter notre compréhension des obstructions possibles pour l'existence du plongement dans le problème de Connes. Remarquons que les deux variantes les plus naturelles du problème ci-dessus ont une réponse affirmative : Grace à Helton et McCullough, on a la version pour l'hypercube du théorème de Helton déjà mentionné, et la contrepartie commutative a été démontrée par Putinar (cf. [**KS2**] pour les références).

Il y a aussi une stratégie plus fondamentale que nous allons poursuivre parallèlement. C'est d'augmenter notre compréhension en considérant des anneaux R qui sont en même temps proche de l'anneau $\mathbb{R}^{s\times s}$ motivant et l'anneau $\mathbb{R}\langle\bar{X}\rangle$ si important. Ainsi on s'intéresse à l'anneau $\mathrm{GM}(s,n)$ « engendré » par n matrices $s \times s$ symétriques « génériques ». C'est $\mathbb{R}\langle\bar{X}\rangle$ quotienté par les identités polynomiales NC qui sont satisfaites par toutes les $s \times s$ matrices symétriques. La raison pour laquelle $\mathrm{GM}(s,n)$ semble être pas si loin de $\mathbb{R}^{s\times s}$ est qu'il peut être définie aussi comme un sous-anneau de l'anneau $\mathbb{R}[\bar{\xi}]^{s\times s}$ des matrices $s \times s$ à coefficients polynomiales en variables commutatifs $\xi_{ij}^{(\ell)}$ $(1 \leq i \leq j \leq s,\ 1 \leq \ell \leq n)$. Comme tel, il est engendré par les n matrices $s \times s$ symétriques $(\xi_{ij}^{(\ell)})_{ij}$ où $\xi_{ji}^{(\ell)} := \xi_{ij}^{\ell}$ pour $j > i$. C'est une algèbre à identités polynomiales dont la localisation centrale est une algèbre à division qu'on appelle l'algèbre à division générique $\mathrm{UD}(s,n)$.

Une version faible de (A) et en même temps une version NC de la solution de Artin du 17e problème d'Hilbert [**BPR**] pour $\mathrm{GM}(s,n)$ a été donnée par Procesi et Schacher [**PS**, Theorem 5.4]. Quant à (C), Matej Brešar a récemment montré (communication personelle) que $f \in \mathrm{GM}(s,n)$ est de trace zero ssi $f \sim 0$. Un but concret est de vérifier ou réfuter l'amélioration suivante du théorème de Procesi et Schacher :

Problème ouvert. — *Soit* $A \in \mathrm{GM}(s,n)$ *SDP par rapport à toute évaluation* $\mathrm{GM}(s,n) \to \mathbb{R}^{s\times s}$, $Y_i \mapsto B_i$ $(B_i \in \operatorname{Sym}\mathbb{R}^{s\times s})$. *Alors* $A \in \Sigma^2\,\mathrm{UD}(s,n)$?

La variante de ceci pour l'anneau $\mathbb{R}[\bar{\xi}]^{s\times s}$ est bien connue (grace à Djoković, indépendamment démontré par Gondard and Ribenboim aussi ; cf. [**PS**]). Les deux IP ont récemment employé de l'algèbre réelle pour établir l'amélioration suivante (travaux en cours) :

Théorème. — *Soit* $A \in \mathbb{R}[\bar{\xi}]^{s\times s}$. *Alors* A *est définie positive pour tous les choix de* $\bar{\xi}$ *dans* $\mathbb{R}$ *si et seulement s'il existe* $\sigma \in \Sigma^2\mathbb{R}[\bar{\xi}]$ *tel que* $\sigma A \in 1 + \Sigma^2\mathbb{R}[\bar{\xi}]^{s\times s}$.

Nous regardons maintenant une variante de (B) pour l'anneau des matrices génériques.

En gros, un polynôme NC polynomial NSDN sur l'hypercube NC s'écrit comme une somme de carrées hermitiens avec denominateurs [**Ci, KS1**]. Étant motivés par par ceci ainsi que par la condition (B) originale pour $\mathbb{R}^{s\times s}$, nous proposons :

Problème ouvert. — *Soit* $A \in \mathrm{GM}(s,n)$ *NSDN par rapport à toutes les évaluations* $\mathrm{GM}(s,n) \to \mathbb{R}^{s\times s}$*. Existe-t-il* $B_1, \dots, B_t \in \mathrm{GM}(s,n)$ *tel que*

$$\sum B_i^* A B_i \in 1 + \Sigma^2\, \mathrm{GM}(s,n)?$$

Quant au problème analogue pour l'anneau $\mathbb{R}[\bar{\xi}]^{s\times s}$, ce n'est pas vrai en général mais pour des cas spéciaux importants (travaux en cours).

Finalement, nous nous penchons sur (D) qui devrait avoir l'impact le plus grand sur le problème de Connes :

Problème ouvert. — *Supposons que* $A \in \mathrm{GM}(s,n)$ *est de trace positive par rapport à toutes les évaluations* $\mathrm{GM}(s,n) \to \mathbb{R}^{s\times s}$*. Alors* $A \in \Theta^2\, \mathrm{UD}(s,n)$*? Ou du moins* $A \sim B \in \mathrm{GM}(s,n)$ *pour un* B *qui est SDP par rapport à toutes les évaluations*?

Ceci donne la possibilité de s'attaquer au problème important de Connes avec des méthodes de l'algèbre réelle dans l'esprit de [**PS**]. En gros, l'idée est notamment d'approcher un polynôme NC $f \in \mathbb{R}\langle \bar{X}\rangle$ par ses images dans une suite croissante d'anneaux de matrices génériques et d'exploiter leur positivité.

Vu que $\mathrm{UD}(s,n)$ est *de dimension finie* sur son centre, cette idée pourrait permettre d'utiliser toute la machinerie développée dans la théorie des formes hermitiennes et quadratiques pour les algèbres à division. En sus, $\mathrm{UD}(s,n)$ peut être représenté explicitement en termes d'une base sur son centre. De plus, pour $s = 2,3,4$, on connaît des descriptions explicites du centre de $\mathrm{UD}(s,n)$. Ce sont les ingrédients de base pour un premier pas qui serait de résoudre les problèmes ouverts proposés pour petit s.

Tous ces problèmes se généralisent de façon naturelle aux algèbres à division de dimension finie et même aux algèbres simples centrales sur les corps k de caractéristic 0. On ignore même la réponse pour la plupart des problèmes dans le cas scindé, cas dans lequel l'algèbre en question est une algèbre matricielle sur k. Ceci sera étudié dans une branche secondaire du projet de recherche proposé.

Collaboration antérieure. — À partir de 2005, quand l'IP slovène a visité l'Université de Constance en Allemagne (où l'IP français était alors situé) pour 9 mois, les deux IP ont collaboré sur plusieurs articles concernant les polynômes en variables NC. Le prémier papier conjoint [**KS1**] aborde les polynômes NC nulle part semidéfinis negatifs sur l'hypercube NC. Il est en rapport avec les résultats plus abstraits de Cimprič [**Ci**]. Comme mentionné ci-dessus, [**KS2**] étudie la positivité traciale des polynômes NC et la relie au problème de plongement d'Alain Connes. Finalement, [**KS3**] applique ces méthodes (en particulier l'approche par PSD) à un problème ouvert de la physique statistique, notamment la fameuse conjecture de Bessis-Moussa-Villani (BMV). Ce dernier travail a été avancé plus loin par Burgdorf [**Bu**], la doctorante encadrée par l'IP français à Rennes.

En sus de la coopération déjà détaillée, les PI ont travaillé ensemble sur la conjecture BMV [**KS3**] et sur les fonctions barrières auto-concordantes :

Lieb et Seiringer ont réussi à reformuler la conjecture BMV comme suit : Pour tout (m,k) avec $0 \leq k \leq m$, dénotons par $S_{m,k} \in \mathbb{R}\langle X,Y \rangle$ la somme de tous les mots de longueur m dans lequels X figure exactement $m-k$ fois et Y exactement k fois. La conjecture dit alors que, pour tout (m,k), la trace de $S_{m,k}$ est toujours positive lorsqu'on substitue des matrices SDP de la même taille pour les variables X et Y. Une solution positive de cette conjecture aurait des conséquences importantes dans la physique de la matière condensée. Les deux IP ont cheminé une approche appropriée par PSD et algèbre NC qui a conduit à une solution positive pour $m \leq 13$. Continuant ce travail, la doctorante Burgdorf a pu demontrer la conjecture pour $k \leq 4$ (et donc par symétrie pour $m - 4 \leq k$).

Un autre thème de recherche concerne les fonctions barrières auto-concordantes pour des cônes de polynômes positifs qui constituent d'après les travaux de Nesterov et Nemirovskii un fondement théorique pour les méthodes modernes de point intérieur dans l'optimisation convexe. Les IP ont trouvé des évidences numériques contre l'auto-concordance d'un candidat naturel pour une fonction barrière pour le cône de polynômes globalement positifs lorsque le nombre de variables et le degré sont fixés. En même temps, les IP pensent être sur le bon chemin vers une fonction barrière pour le cône des matrices copositives, ce qui serait une amélioration considérable par rapport à la fonction barrière universelle pour ce cône. Ceci sont des travaux encore en cours.

En ce moment (mai 2008), l'IP slovène rend visite à l'équipe française pour un mois, continuant le travail sur l'anneau $\mathbb{R}[\bar{\xi}]^{s\times s}$ décrit dans la section « Description du projet ».

Résultats espérés. — Le project proposé a le but d'établir une branche émergente de l'algèbre réelle qui aborde des phénomènes réels NC. Les problèmes ouverts discutés évidemment exigent des nouvelles méthodes algébriques reliant l'algèbre NC avec la théorie des structures ordonnées, méthodes qui s'esquissent récemment dans l'algèbre réelle. La coopération proposée créerait des synergies en mettant ensemble les experts en matière NC de Ljubljana avec les professionnels de la géométrie algébrique réelle à Rennes. Le deuxième membre de l'équipe slovène, Jakob Cimprič a découvert des principes généraux abstraits de l'algèbre NC exigée. Du côté français, la thèse de la doctorante Sabine Burgdorf sur le problème de plongement d'Alain Connes et la conjecture BMV profiterait très largement de l'échange envisagé. Le membre senior de l'équipe française, Marie Françoise Roy, est une des plus grandes expertes sur les polynômes positifs et les algorithmes en algèbre réelle.

Nous envisageons concrètement de résoudre plusieurs des problèmes mentionnés ci-dessus en trouvant des techniques intéressantes s'appliquant à la positivité NC. Ceci devrait mener à plusieurs articles continuant la collaboration qui a été si fertile jusqu'à présent.

Références

[BPR] S. Basu, Pollack, M.-F. Roy : *Algorithms in real algebraic geometry*, Berlin : Springer (2006)

[Bu] S. Burgdorf : Sums of hermitian squares as an approach to the BMV conjecture, preprint
http://arxiv.org/abs/0802.1153

[Ci] J. Cimprič : Maximal quadratic modules on $*$-rings, Algebr. Represent. Theory **11**, 83-91 (2008)

[Co] A. Connes : Classification of injective factors. Cases II_1, II_∞, III_λ, $\lambda \neq 1$, Ann. Math. (2) **104**, 73-115 (1976)

[He] J.W. Helton : "Positive" noncommutative polynomials are sums of squares, Ann. Math. (2) **156**, 675-694 (2002)

[KS1] I. Klep, M. Schweighofer : A Nichtnegativstellensatz for polynomials in noncommuting variables, Isr. J. Math. **161**, 17-27 (2007)

[KS2] I. Klep, M. Schweighofer : Connes' embedding conjecture and sums of hermitian squares, Adv. Math. **217**, 1816-1837 (2008)

[KS3] I. Klep, M. Schweighofer : Sums of hermitian squares and the BMV conjecture, accepté pour publication dans J. Stat. Phys.
http://arxiv.org/abs/0710.1074

[PS] C. Procesi, M. Schacher : A non-commutative real Nullstellensatz and Hilbert's 17th problem, Ann. Math. (2) **104**, 395-406 (1976)

---

9 mai 2008

KLEP • *E-mail :* igor.klep@fmf.uni-lj.si • *Url :* http://www.math.ucsd.edu/~iklep/publ.html
SCHWEIGHOFER • *E-mail :* markus.schweighofer@univ-rennes1.fr • *Url :* http://perso.univ-rennes1.fr/markus.schweighofer/