

Übungen zur Vorlesung Algebra I
Blatt 12 (zweite Hälfte)

Allgemeiner Hinweis: Dieses Blatt wird nicht bepunktet und dient lediglich zu Ihrer eigenen Vorbereitung auf die Klausur. Für die Bearbeitung werden alle Resultate der Vorlesung vorausgesetzt.

Aufgabe 12.4 (Galoiserweiterungen)

Seien F , K und E Körper mit $F \subseteq K \subseteq E$. Zeigen Sie:

- (i) Falls E/F eine normale Erweiterung ist, dann ist auch E/K eine normale Erweiterung.
- (ii) Falls E/F eine separable Erweiterung ist, dann ist auch E/K eine separable Erweiterung.
- (iii) Falls E/F eine Galoiserweiterung ist, dann ist auch E/K eine Galoiserweiterung.
- (iv) Falls E/F eine Galoiserweiterung ist und $\text{Gal}(E/K) \trianglelefteq \text{Gal}(E/F)$ gilt, dann ist K/F eine Galoiserweiterung.

Aufgabe 12.5 (Galois-Korrespondenz I)

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Zeigen Sie, dass K/\mathbb{Q} eine Galoiserweiterung ist. Bestimmen Sie $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ und geben Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung K/\mathbb{Q} an.

Aufgabe 12.6 (Galois-Korrespondenz II)

Sei $f(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ und sei L ein Zerfällungskörper von f .

- (i) Zeigen Sie, dass $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong D_4$ gilt.
- (ii) Beschreiben Sie die 10 verschiedenen Untergruppen von D_4 .
- (iii) Bestimmen Sie die Zwischenkörper der Erweiterung L/\mathbb{Q} und geben Sie für jeden Zwischenkörper F ein primitives Element für F über \mathbb{Q} an.