Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Franzen, W. Maurer, M. Sani
Sommersemester 2015

Universität
Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 1

Abgabe: Bis Donnerstag 23. April 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis2-15.html`

Aufgabe 1.1 *(4 Punkte)*

Seien E, F, G normierte Räume. Beweisen Sie:

(i) $L(E, F)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Mit der Operatornorm ist $L(E, F)$ ein normierter Raum.
(ii) Ist F ein Banachraum, so ist $L(E, F)$ vollständig.
(iii) Seien $A \in L(E, F)$ und $B \in L(F, G)$, so gilt $\|B \circ A\| \le \|B\| \cdot \|A\|$.
(iv) Ist $A \in L(E)$, so definieren wir induktiv $A^0 := \mathrm{id}_E$ und für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $A^{n+1} := A \circ A^n$. Es gilt $\|A^n\| \le \|A\|^n$.

Aufgabe 1.2 *(8+**2**+**2**+**2** Punkte)*

Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge aller reellen $n \times n$-Matrizen. Sei $GL(n)$ die Teilmenge aller $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass A invertierbar ist. Sei $O(n)$ die Teilmenge aller $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass $AA^t = A^tA = \mathbb{1}$ gilt. Zeigen Sie:

(i) Seien $A \in O(n)$ und v eine Spalte von A. Dann gilt $\|v\| = 1$.
(ii) $O(n)$ ist kompakt.
(iii) Die Determinante einer $n \times n$-Matrix A,
$$\begin{aligned}\det : \mathbb{R}^{n\times n} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ A &\longmapsto \det(A),\end{aligned}$$
ist eine stetige Funktion.
(iv) $GL(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ ist offen.
(v) Der Rang einer $n \times m$-Matrix A,
$$\begin{aligned}\mathrm{rk} : \mathbb{R}^{n\times m} &\longrightarrow \mathbb{N}\\ A &\longmapsto \mathrm{rk}(A),\end{aligned}$$
ist eine unterhalbstetige Funktion.
(vi) $O(n)$ besteht aus mindestens zwei Zusammenhangskomponenten.
(vii) $O(n)$ besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Bitte wenden!

Aufgabe 1.3 *(4+2 Punkte)*

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm und die Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ für $n \geq 2$ genau zwei Zusammenhangskomponenten besitzt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^1$ und $[0,1]$ nicht homöomorph sind.

(iii) Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\} \cup \big\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\big\}$$

zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.