Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Franzen, W. Maurer, M. Sani
Sommersemester 2015

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 10

Abgabe: Bis Donnerstag 25. Juni 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis2-15.html`

Aufgabe 10.1 (*Glättung*) (*2+6+2 Punkte*)

Sei X ein topologischer Raum. Dann definieren wir den *Träger (engl. support)* einer Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Gegeben sei eine Funktion $0 \le \eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, so dass $\operatorname{supp}(\eta) \subset (-1,1)$ gilt. Wir nehmen an, dass η

$$\int\limits_{-1}^{1} \eta = 1$$

erfüllt. Eine solche Funktion η heißt *Friedrichscher Glättungskern*. Für $0 < \varepsilon \le 1$ setzen wir $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$. Seien nun $a < b \in \mathbb{R}$. Für $f \in R([a,b])$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$f_\varepsilon(x) := \int\limits_a^b \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie:

(i) Ein solcher Friedrichscher Glättungskern η existiert.
Hinweis: Benutze $\mathrm{e}^{-\frac{1}{p(x)}}$.

(ii) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(iii) Es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\|f_\varepsilon\|_{C^{0,1}(\mathbb{R})} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x)| + \sup_{x\neq y\in\mathbb{R}} \frac{|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)|}{|x-y|} \le \frac{c}{\varepsilon^2} \cdot \|f\|_{L^\infty}$$

gilt.

(iv) Ist f im Punkt $x \in (a,b)$ stetig, so gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = f(x).$$

Hinweis: Untersuche zunächst $f \equiv 1$.

(v) Sei $K \subset (a,b)$ ein abgeschlossenes Intervall und $f \in C^k((a,b))$ $(k \ge 0)$. Dann konvergiert $f_\varepsilon|_K$ für $\varepsilon \to 0$ in $C^k(K)$ gegen $f|_K$.

Aufgabe 10.2 (*zur Definition der Ableitung*) (*3 Punkte*)

a) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung aus Definition 6.1 (Differenzierbarkeit) eindeutig ist, d. h. dass die Ableitung wohldefiniert ist.
b) Zeigen Sie direkt nach Definition 6.1, dass die folgende Funktion differenzierbar ist, und geben Sie die Ableitung an.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \begin{pmatrix} y\,(x+z)^2+7 \\ z+\frac{1}{3}(x+y)^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 10.3 (*3 Punkte*)

Seien X, Y Banachräume, $\Omega \subset X$ offen und $x_0 \in \Omega$. Wir betrachten die folgenden Räume

$$\begin{aligned} A &:= \{f\colon \Omega \to Y\colon f \text{ ist differenzierbar in } x_0\}, \\ B &:= \{f\colon \Omega \to Y\colon f \text{ ist differenzierbar}\}, \\ C &:= \{f\colon \Omega \to Y\colon f \text{ ist stetig differenzierbar}\}, \\ D &:= \{f\colon \Omega \to Y\colon f \text{ ist stetig in } x_0\}, \\ E &:= \{f\colon \Omega \to Y\colon f \text{ ist stetig}\}. \end{aligned}$$

Geben Sie in einer Tabelle der Form

$\subset$	A	B	$\cdots$	E
A	✓	$A \overset{?}{\subset} B$	$\cdots$	$A \overset{?}{\subset} E$
B	$B \overset{?}{\subset} A$	✓	$\cdots$	$B \overset{?}{\subset} E$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
E	$E \overset{?}{\subset} A$	$E \overset{?}{\subset} B$	$\cdots$	✓

an, welche Inklusionen zwischen diesen Räumen immer gelten, unabhängig von der Wahl der Banachräume X, Y, der offenen Menge $\Omega \subset X$ und des Punktes $x_0 \in \Omega$. Beweisen Sie ihre Behauptungen in den Fällen

(i) $E \overset{?}{\subset} A$,
(ii) $A \overset{?}{\subset} D$,
(iii) $B \overset{?}{\subset} C$.

Hinweis: Betrachten der Funktion $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ könnte hilfreich sein.

Aufgabe 10.4 (*4 Punkte*)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Wir bezeichnen mit $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Überprüfen Sie die folgenden Funktionen f und g auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie die Ableitungen in Punkten, in denen die Funktionen differenzierbar sind. Berechnen Sie dort auch die partiellen Ableitungen und den Gradienten ∇f von f.

(i) $f\colon \mathbb{R}^n \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$,
(ii) $g\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{x}{|x|} \in \mathbb{R}^n$.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Ableitung und den partiellen Ableitungen?