Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Franzen, W. Maurer, M. Sani
Sommersemester 2015

Universität
Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 11

Abgabe: Bis Donnerstag 02. Juli 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis2-15.html`

Aufgabe 11.1 (*Multilineare Abbildungen*) (*4 Punkte*)

Beweisen Sie Bemerkung 6.6 (i) und (ii) aus der Vorlesung. Machen Sie sich klar, dass $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ ein normierter Raum ist, und geben Sie nur den Beweis der Vollständigkeit an.

Aufgabe 11.2 (*Der Banachraum* $C^1(\overline{\Omega}, F)$) (*4 Punkte*)

Seien E, F Banachräume und $\Omega \subset E$ offen. Wir wollen stets annehmen, dass Funktionen $f \in C^1(\overline{\Omega}, F)$ stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt sind. Wir definieren den Funktionenraum

$$C^1_0(\overline{\Omega}, F) := \{f \in C^1(\overline{\Omega}, F) \colon f|_{\partial\Omega} \equiv 0\}$$

und wählen darauf die Norm $\|\cdot\|_{C^1(\overline{\Omega},F)}$. Zeigen Sie, dass

(i) $C^1(\overline{\Omega}, F)$ und
(ii) $C^1_0(\overline{\Omega}, F)$

Banachräume sind. Machen Sie sich klar, dass es sich um normierte Vektorräume handelt und geben Sie jeweils nur den Beweis der Vollständigkeit an.

Hinweis: Man kann die Abbildung

$$\gamma \colon C^1(\overline{\Omega}, F) \to C^0(\partial\Omega, F)$$
$$f \mapsto f|_{\partial\Omega}$$

verwenden und zeigen, dass diese stetig ist.

Bemerkung: Für den Fall $E = \mathbb{R}^n$ und $F = \mathbb{R}$ können Sie bereits bis zu 3 Punkte erhalten.

Aufgabe 11.3 (*Fréchet- und Gateaux-Ableitung*) (*4 Punkte*)

Definition. Seien E, F Banachräume, $\Omega \subset E$ offen.

(a) Eine Abbildung $f \colon \Omega \to F$ heißt *in* $x \in \Omega$ *Gateaux-differenzierbar*, falls ein $A \in L(E, F)$ existiert, so dass für alle $h \in E$
$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[f(x + th) - f(x) - A\langle th\rangle\right] = 0$$
gilt. Dann heißt A die *Gateaux-Ableitung von* f *in* x und wird mit $f'(x)$ bezeichnet.

(b) Ist f in jedem Punkt $x \in \Omega$ Gateaux-differenzierbar, so heißt f *Gateaux-differenzierbar* und die Abbildung $f' \colon x \mapsto f'(x)$ heißt *Gateaux-Ableitung von* f.

(c) Die Abbildung $f \colon \Omega \to F$ heißt *in* $x \in \Omega$ *Fréchet-differenzierbar*, falls ein $A \in L(E, F)$ existiert, so dass
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \left[f(x + h) - f(x) - A\langle h\rangle\right] = 0$$
gilt. Dann heißt A die *Fréchet-Ableitung von* f *in* x.

(d) Wir definieren *Fréchet-Differenzierbarkeit* und *Fréchet-Ableitung* analog zu (b).

(e) Die Abbildung f heißt *stetig Gateaux-differenzierbar* bzw. *stetig Fréchet-differenzierbar*, falls die Gateaux- bzw. Fréchet-Ableitung stetig ist.

Aufgabe. Erläutern Sie in Worten den Unterschied zwischen der Gateaux- und der Fréchet-Differenzierbarkeit. Welcher der beiden Begriffe stimmt mit dem Differenzierbarkeitsbegriff aus der Vorlesung überein? Beweisen Sie:

(i) Die linearen Abbildungen A aus den Definitionen (a) bzw. (c) sind eindeutig bestimmt.

(ii) Ist f Fréchet-differenzierbar, so ist f Gateaux-differenzierbar und die Gateaux- und die Fréchet-Ableitung stimmen überein.

(iii) Ist f stetig Gateaux-differenzierbar, dann ist f auch stetig Fréchet-differenzierbar.
Hinweis: Zeigen Sie

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x+th)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'(x+th)\langle h\rangle\,\mathrm{d}t \\ &= f'(x)\langle h\rangle + \int_0^1 f'(x+th)\langle h\rangle - f'(x)\langle h\rangle\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Bemerkung: Für den Fall $E = \mathbb{R}^n$ und $F = \mathbb{R}$ können Sie bereits bis zu 3 Punkte erhalten.

Aufgabe 11.4 (*Minimalflächen*) (*4+**2** Punkte*)

Wir identifizieren $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{1\times 2} \equiv \mathbb{R}^2$ und verwenden das Standardskalarprodukt. Die induzierte euklidische Norm schreiben wir als $|\cdot|$.

Sei ein Rechteck $\Omega = (a,b)\times(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}^2$ gegeben. Für eine Funktion $f \in C^1(\overline{\Omega})$ ist der Flächeninhalt des Graphen $\operatorname{graph} f := \{(x, f(x)) \colon x \in \Omega\}$ durch

$$A[f] = \int_\alpha^\beta \int_a^b \sqrt{1 + |Df(x,y)|^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

gegeben. Wir wollen nun Minimalflächen für fest vorgegebene Randwerte untersuchen. Dazu schränken wir A auf die Menge $U := \{f \in C^1(\overline{\Omega}) \colon f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}\}$ ein, wobei $\varphi \in C^1(\Omega)$ eine fest vorgegebene Funktion ist. Dann heißt $\operatorname{graph} f$ *Minimalfläche*, falls f ein kritischer Punkt von $A|_U$ ist. Allerdings haben wir Differenzieren bisher nur auf Vektorräumen definiert und U ist kein Vektorraum, sondern ein affiner Raum. Deshalb betrachten wir

$$\begin{aligned} A_\varphi \colon C_0^1(\overline{\Omega}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto A[\varphi + f]. \end{aligned}$$

Dann ist $\operatorname{graph}\varphi$ genau dann eine Minimalfläche, wenn 0 ein kritischer Punkt von A_φ ist.

(i) Zeigen Sie, dass A_φ differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung.
Hinweis: Verwenden Sie folgende Taylorentwicklung für $x, x_0 \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+|x|^2} &= \sqrt{1+|x_0|^2} + \frac{\langle x_0, x - x_0\rangle}{\sqrt{1+|x_0|^2}} + R(x_0, x), \\ |R(x_0,x)| &\le \tfrac{1}{2}\,|x-x_0|^2 \cdot (1 + |x_0|^2 + |x_0|\cdot|x-x_0|). \end{aligned}$$

(ii) Sei $h \in C^0(\overline{\Omega})$ und es gelte $\int_\alpha^\beta \int_a^b h(x,y)\cdot g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$ für alle Funktionen $g \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie, dass dann $h \equiv 0$ gilt.

(iii) Nehmen Sie an, dass $D\varphi \equiv \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$ stetig partiell differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass $\operatorname{graph}\varphi$ genau dann eine Minimalfläche ist, wenn φ die *Minimalflächengleichung*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sqrt{1+|D\varphi|^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{1+|D\varphi|^2}}\right) = 0$$

erfüllt.

Aufgabe 11.5 (*4 Punkte*)

Sei $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \max\{|x|,|y|\} = 1\}$ das Einheitsquadrat. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ das Quadrat der Distanzfunktion zu Q. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen $d := (\operatorname{dist}(\cdot, Q))^2$ nicht differenzierbar ist, und zeichnen Sie diese in eine Skizze. Berechnen Sie die Ableitung in Punkten, in denen d differenzierbar ist.