Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Franzen, W. Maurer, M. Sani
Sommersemester 2015

Universität
Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 12

Abgabe: Bis Donnerstag 09. Juli 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis2-15.html`

Aufgabe 12.1 (*Jacobimatrizen*) (*4 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die Jacobimatrizen folgender Abbildungen:

$$
\begin{aligned}
f&\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, & (x,y,z) &\mapsto xy^3 + \mathrm{e}^{xz^2},\\
g&\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, & (x,y) &\mapsto \big(x(x+y),\, \log(1+y^2),\, \cos(xy)\big)\,,\\
h&\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, & (x,y,z) &\mapsto \big(y\cosh(x),\, \log(1+(xz)^2),\, \arctan(x^2+y^2-z^2)\big).
\end{aligned}
$$

(b) Berechnen Sie die Jacobimatrizen J folgender Abbildungen. Berechnen Sie außerdem das Matrixprodukt $g := J^t \cdot J$, die Inverse der Jacobimatrix J^{-1} und die Determinante $\det(J)$.

$$
\begin{aligned}
\Psi\colon (0,\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3\\
(r,\varphi,z) &\mapsto (r\cos(\varphi),\, r\sin(\varphi),\, z)\,,\\
\Phi\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3\\
(r,\theta,\varphi) &\mapsto (r\sin(\theta)\cos(\varphi),\, r\sin(\theta)\sin(\varphi),\, r\cos(\theta))\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 12.2 (*Gegenbeispiele*) (*4 Punkte*)

(a) Führen Sie die Details zu Beispiel 6.53 (iii) aus der Vorlesung aus.

(b) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^4 - 3x^2y + y^2$. Berechnen Sie die Hessematrix H_f von f, also die Matrix, die aus den zweiten partiellen Ableitungen von f gebildet wird:

$$
H_f := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix}.
$$

Ist $H_f(0,0)$ positiv (semi-)definit? Untersuchen Sie f längs aller Geraden durch $(0,0)$ auf (lokale) Minima im Ursprung. Nimmt f (definiert auf $\mathbb{R}^2$) im Ursprung ein (lokales) Minimum an?

Aufgabe 12.3 (*Zweite Ableitung und Kettenregel*) (*4 Punkte*)

(a) Seien E, F, G Banachräume und $\Omega_E \subset E$, $\Omega_F \subset F$ offene Teilmengen. Es seien $f\colon \Omega_E \to \Omega_F \subset F$ und $g\colon \Omega_F \to G$ zweimal differenzierbare Abbildungen. Wir setzen $h := g \circ f$. Verwenden Sie die Kettenregel um $D^2h(x)\langle u, v\rangle$ durch f und g und deren Ableitungen auszudrücken.

(b) Geben Sie für **zehn** der auftretenden Terme an, in welchen Räumen sich diese befinden. Dabei dürfen Sie Terme auch als Funktionen von x, u, v, f, g oder anderer Argumente betrachten. Geben Sie dann auch an, ob eine solche Funktion in einem Raum $C^0(\ldots)$, $C^1(\ldots)$ oder sogar einem Raum $L(\ldots)$ enthalten ist. Ist keines davon erfüllt, so benutzen sie bitte die Schreibweise $\mathrm{Abb}(A, B)$ für alle Abbildungen von der Menge A in die Menge B. Bsp.:

$$\begin{aligned} Df(x)\langle\cdot\rangle &\in L(E, F), \\ Df(\cdot)\langle v\rangle &\in C^0(\Omega_E, F), \\ g \mapsto Dg(f(x)) &\in L\left(C^1(\Omega_F, G), L(F, G)\right), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aufgabe 12.4 (*Ableitung der Determinanten und Inversen*) (*4 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die Ableitung von $\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$. Wir schreiben $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Bestimmen sie auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det(A)$. Zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det(A)\right)_{1\le i,j\le n} = \det(A)\left(A^{-1}\right)^t$$

gilt, falls A invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi\colon GL(n) \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \mapsto A^{-1}$, wobei $GL(n)$ die Menge der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen bezeichnet, eine glatte Abbildung ist und berechnen Sie alle ihre Ableitungen.
Hinweis: Beispiel 6.53 (ii).