Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Franzen, W. Maurer, M. Sani
Sommersemester 2015

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 2

Abgabe: Bis Donnerstag 30. April 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis2-15.html`

Aufgabe 2.1 Landausymbole *(2+1+1 Punkte)*

(a) Seien E, F Banachräume, $\Omega \subset E$ offen und $f : \Omega \to F$ eine Abbildung. Sei $x_0 \in \Omega$. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = O\left(\|x - x_0\|^\alpha\right) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = o\left(\|x - x_0\|^\beta\right)$$

für alle $0 < \beta < \alpha$ gilt.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. Sei $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $P(x) := a_0 + a_1\, x + \ldots + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_n\, x^n$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$P(x) = O\left(|x|^n\right) \quad \text{für } x \to \infty$$

gilt.

(c) Sei $1 < \sigma < 2$. Sei $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $w(\rho) := \frac{-\rho\,\sigma + \sigma - 2}{\rho(\rho(\sigma-2)-\sigma)} - \frac{-\sigma+2}{\rho\,\sigma}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$w(\rho) = o\left(\rho^{-1}\right) \quad \text{für } \rho \to 0$$

gilt.

Aufgabe 2.2 Differenzenquotienten *(1+1+1+1+1 Punkte)*

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Definiere die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = x \cdot g(x).$$

Unter welchen der folgenden Annahmen an g ist f im Punkte 0 differenzierbar?

(i) $g(0) = 0$ und g ist beschränkt,
(ii) g ist in 0 stetig,
(iii) g ist in 0 stetig und es gilt $g(0) = 0$,
(iv) $g(x) = o(1)$ für x nahe 0,
(v) $|g(x)| \le |x|^a$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $a > 0$.

Aufgabe 2.3 Ableitung der Inversen, MWS, Kettenregel *(1+1+1 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := x + e^x$$

invertierbar ist. Berechnen Sie die Ableitung der Inversen im Punkt $y_0 = 1$.

(b) Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und der Grenzwert $a := \lim\limits_{x \to \infty} f'(x)$ existiere. Zeigen Sie

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x+1) - f(x)] = a$.
(ii) Ist f zusätzlich beschränkt, so ist $a = 0$.

(c) Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie:

Die Ableitung einer differenzierbaren geraden (bzw. ungeraden) Abbildung ist ungerade (bzw. gerade).

Aufgabe 2.4 Kompaktheit (*4 Punkte*)

Sei X ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Zeigen Sie: Besitzt jeder Punkt $a \in X$ eine Umgebung U, so dass $f|_U$ beschränkt ist, so ist f beschränkt.

Aufgabe 2.5 Freiwillige Zusatzaufgabe (**1+1+2 Punkte**)

Sei X ein Banachraum und sei $T \in L(X)$ mit $\|T\| < 1$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$S := I + T + T^2 + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in L(X)$$

ist.

(b) Zeigen Sie, dass $(I - T)S = S(I - T) = I$ gilt.

(c) Seien $A, B \in L(X)$ mit $AB = BA = I$. Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $C \in L(X)$ mit $\|C\| < \varepsilon$

$$A - C$$

invertierbar ist.

Hinweis: Betrachten Sie $I - BC$ und benutzen Sie die obigen Teilaufgaben.