Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Franzen, W. Maurer, M. Sani
Sommersemester 2015

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 5

Abgabe: Bis Donnerstag 21. Mai 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis2-15.html`

Aufgabe 5.1 Zweite Ableitungen *(2+2 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass für eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Identität

$$f''(x) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^2}$$

gilt.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.
Zeigen Sie, dass für

$$A \in \mathbb{R} \cong L(\mathbb{R}, L(\mathbb{R},\mathbb{R})) \cong L_2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $A = f''(x_0)$,

(ii)
$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + Df(x_0)\langle x-x_0\rangle + A\langle x-x_0, x-x_0\rangle + o\left(|x-x_0|^2\right)\\ &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + A\cdot(x-x_0)^2 + o\left(|x-x_0|^2\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2 Gronwallsches Lemma/Stetige Diff'barkeit *(3+1 Punkte)*

(a) Sei $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ eine Funktion mit

$$\varphi(t) \le t \cdot \sup_{\tau\in[0,t]} \varphi(\tau).$$

Zeigen Sie, dass $\varphi(t) = 0$ für alle $t \in [0, 1/2]$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0,\\ 0, & \text{für } x = 0.\end{cases}$$

überall differenzierbar, aber nicht überall stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 5.3 Taylorreihe, Restgliedabschätzung *(2+2 Punkte)*

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0,\\ 0 & \text{für } x = 0.\end{cases}$$

Zeigen Sie,

(i) Es gibt Polynome q_n derart, dass für die n-te Ableitung von f

$$f^{(n)}(x) = q_n\left(\tfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \quad \text{für } x \neq 0 \text{ und } f^{(n)}(0) = 0$$

gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe $T_f(x)$ von f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ überall konvergiert, dass aber $T_g(x) \neq f(x)$ für alle $x \neq 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die durch $f(x) := x + e^x$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Umkehrfunktion $g := f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

Bestimmen Sie das 2. Taylor-Polynom $T_2(y) := T_2(g, y_0)(y)$ von g mit Entwicklungspunkt $y_0 = 1$.

Setze $T_1(y) := T_1(g, y_0)(y)$. Schätzen Sie das 1. Restglied $R_1(y) = g(y) - T_1(y)$ von g für $1 < y < 11/10$ mit Hilfe der Restglieddarstellung von Lagrange ab.

Aufgabe 5.4 Partialbruchzerlegung *(1+1+1+1 Punkte)*

Führen Sie die Partialbruchzerlegung für die folgenden reellen rationalen Funktionen durch.

$$(a) \quad \frac{18x^2 + 15x - 4}{(3x+1)^2(x-2)}, \qquad (b) \quad \frac{x^4}{(x-2)^3},$$
$$(c) \quad \frac{6x^2 - 12}{(x^2-4)(x+1)}, \qquad (d) \quad \frac{1}{x^4+4}.$$

Gehen Sie wie beim Beweis der Existenzaussage in Theorem 4.86 vor.

Aufgabe 5.5 Freiwillige Zusatzaufgabe: *(1+3+2 Punkte)*

(a) **Weierstraß-Funktion:** Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(7^n \pi x)}{2^n}.$$

Zeigen Sie, dass f überall stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion f aus Aufgabenteil (a) nirgends differenzierbar ist.

(c) **Riemann Integral:** Bestimmen Sie die Ober- und die Untersumme von $f(x) := x^3$ zu äquidistanten Partitionen des Intervalls $[0, a]$ für beliebiges $a > 0$. Berechnen Sie so das Riemann Integral

$$\int_0^a f(x)\, dx.$$

Berechnen Sie insbesondere für die äquidistante Partitionen P_n von $[0, a]$ mit den Zwischenpunkten $Z_n := \{x_k = k\frac{a}{n} : 0 \leq k \leq n\}$ die Ober- und die Untersumme

$$\overline{S}(f, P_n, Z_n) \equiv \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{a}{n}, \quad \underline{S}(f, P_n, Z_n) \equiv \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\frac{a}{n}.$$

Falls $\overline{S} = \underline{S}$ für $n \to \infty$ gilt, so definieren wir das Riemann Integral durch

$$\int_0^a f(x)\, dx := \overline{S} \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$