Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Franzen, W. Maurer, M. Sani
Sommersemester 2015

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 6

Abgabe: Bis Donnerstag 28. Mai 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis2-15.html`

Aufgabe 6.1 (***Integrabilität und Lipschitzstetigkeit***) (*4+2 Punkte*)
Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L, d. h. gelte
$$|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y|$$
für alle $x, y \in [a, b]$.

(a) Zeigen Sie, dass
$$\sigma(f, P) \le L \cdot \eta(P) \cdot |b - a|$$
gilt. Folgern Sie, dass f das Riemannsche Integrabilitätskriterium erfüllt.

(b) Untersuchen Sie Hölderstetige Funktionen auf Riemannsche Integrabilität.

Aufgabe 6.2 (***Integrabilität***) (*4 Punkte*)
Welche der folgenden Funktionen sind Riemann integrabel? Überprüfen Sie jeweils direkt das Riemannsche Integrabilitätskriterium.

(a) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$, mit $a < b \in \mathbb{R}$.

(b)
$$f : [0, 100] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [n, n+1), \quad n \text{ gerade}, \\ -1, & x \in [n, n+1), \quad n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

(c)
$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(d)
$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Aufgabe 6.3 (***Stetigkeit bezüglich der Integrationsgrenzen***) (*4 Punkte*)
Seien $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$ und sei $\mathcal{I} := \{[a, b] : \alpha \le a \le b \le \beta\}$ die Menge der abgeschlossenen Teilintervalle von $[\alpha, \beta]$. Auf $\mathcal{I}$ definieren wir eine Metrik durch
$$d([a, b], [c, d]) := |a - c| + |b - d|.$$
Sei $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrabel. Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{I} \ni I \longmapsto \int\limits_I f$$
stetig ist.

Hinweis: Sie brauchen nicht zu zeigen, dass $(\mathcal{I}, d)$ ein metrischer Raum ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 6.4 (***Gleichmäßige Konvergenz***) (*4 Punkte*)

Sei K ein kompakter metrischer Raum und sei $f_n : K \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen, d. h. gelte

$$f_n(x) \geq f_m(x)$$

für alle $x \in K$ und alle $m \geq n$. Sei $g : K \to \mathbb{R}$ stetig und gelte $f_n(x) \to g(x)$ für $n \to \infty$ und beliebige $x \in K$. Beweisen Sie, dass dann auch $f_n \rightrightarrows g$ für $n \to \infty$ gilt.
Hinweis: Warum genügt es, den Fall $g \equiv 0$ zu betrachten?

Aufgabe 6.5 (***Wachstumsverhalten***) (*4 Punkte*)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nichtkonstantes Polynom,

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

mit $a_k \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$|p(z)| \to \infty \qquad \text{für } |z| \to \infty$$

gilt, d. h. für jedes $M > 0$ gibt es ein $R > 0$, so dass

$$|z| \geq R \implies |p(z)| \geq M$$

gilt.

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $|\sin(rz)| \to \infty$ für $r \to \infty$?