Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Franzen, W. Maurer, M. Sani
Sommersemester 2015

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 7

Abgabe: Bis **Mittwoch, 3. Juni 2015, 15:00 Uhr**, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis2-15.html`

Aufgabe 7.1 (L^p-*Norm I*) (*8+2 Punkte*)

Seien $p \in [1, \infty)$, $a < b \in \mathbb{R}$ und seien $f, g \in R([a, b], \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass $|f|^p \in R([a, b], \mathbb{R})$ gilt, d. h. beweisen Sie, dass Korollar 5.20 gilt.

Nun definieren wir $[f]_{L^p} := \left(\int\limits_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie: $[\lambda f]_{L^p} = |\lambda| [f]_{L^p}$.

(c) Sei $q \in [1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie die Höldersche Ungleichung:

$$\int\limits_a^b |f \cdot g| \le [f]_{L^p} \cdot [g]_{L^q}.$$

(d) Beweisen Sie die Minkowski-Ungleichung:

$$[f + g]_{L^p} \le [f]_{L^p} + [g]_{L^p}.$$

(e) Warum definiert $[\cdot]_{L^p}$ keine Norm auf dem Raum der Riemann integrierbaren Funktionen $R([a, b], \mathbb{R})$?

Aufgabe 7.2 (*Integralidentität*) (*4 Punkte*)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int\limits_0^x f(t)(x - t)\, dt = \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^u f(t)\, dt \right) du.$$

Aufgabe 7.3 (*Integration I*) (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie:

(a) $\int x^2 \cdot \sin(x)\, dx$,

(b) $\int \tan(x)\, dx$,

(c) $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2(x)\, dx$,

(d) $\int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx, \quad R > 0.$