Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Franzen, W. Maurer, M. Sani
Sommersemester 2015

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 8

Abgabe: Bis Donnerstag 11. Juni 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis2-15.html`

Aufgabe 8.1 (*Integralungleichung*) (*4+2 Punkte*)

(a) Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ mit $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(a) = 0$. Beweisen Sie:

$$\int_a^b |ff'|\,dx \leq \frac{b-a}{2}\int_a^b (f')^2\,dx.$$

(b) Beweisen Sie, dass die obige Ungleichung richtig bleibt, auch wenn nicht für alle $x \in [a,b]$ die Annahme $f'(x) \geq 0$ gilt.

Aufgabe 8.2 (*Integration II*) (*1+1+1+1 Punkte*)

Bestimmen Sie:

(a) $\displaystyle\int \frac{18x^2+15x-4}{(3x+1)^2(x-2)}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x-2)^3}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{8}\cdot\frac{-x+1}{x^2-2x+2}\,dx,$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx.$

Aufgabe 8.3 (*Uneigentliche Integrale*) (*1+2+1+2 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad (0 < a < b),$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\sin(x))\,dx.$

Aufgabe 8.4 (*Maximumfunktion ist integrabel*) (*2 Punkte*)

Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f, g \in R([a,b],\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion

$$\begin{aligned} \max\{f,g\} : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \max\{f(x),g(x)\} \end{aligned}$$

integrabel ist.