Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, M. Franzen, W. Maurer, M. Sani
Sommersemester 2015

Universität
Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 9

Abgabe: Bis Donnerstag 18. Juni 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis2-15.html`

Aufgabe 9.1 (L^p-*Norm II*) (*3+2+2+***2***+***2***+***2** *Punkte*)

Seien $p \in [1, \infty)$, $a < b \in \mathbb{R}$ und $f \in R([a,b],\mathbb{R})$. Sei $[\cdot]_{L^p}$ wie in Aufgabe 7.1 definiert, also

$$[f]_{L^p} := \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}.$$

Weiter definieren wir

$$[f]_{L^\infty} := \|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt
$$[f]_{L^p} \to [f]_{L^\infty} \qquad \text{für } p \to \infty.$$
b) $(C^0([a,b]), [\cdot]_{L^p})$ ist ein normierter Raum.
c) Seien $f \in R([a,b],\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Treppenfunktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die
$$[f-g]_{L^p} < \varepsilon$$
erfüllt.
d) Für $f \in R([a,b],\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die
$$[f-g]_{L^p} < \varepsilon$$
erfüllt.
e) Der normierte Raum $(C^0([a,b]), [\cdot]_{L^p})$ ist nicht vollständig.
f) Für $p \neq q \in [1,\infty]$ gibt es kein $c > 0$, so dass für jede Funktion $f \in R([a,b],\mathbb{R})$
$$\frac{1}{c}[f]_{L^p} \le [f]_{L^q} \le c[f]_{L^p}$$
gilt. Aber es gibt ein $c > 0$, so dass eine der beiden Ungleichungen stets gilt.
Hinweis: Benutzen Sie die Höldersche Ungleichung.

Aufgabe 9.2 (*3 Punkte*)

Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f \in R([a,b],\mathbb{R})$. Zeigen Sie

$$\int_a^b f(x)\,\sin(kx)\,dx \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty.$$

Hinweis: Betrachte zunächst den Fall, dass f eine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 9.3 (*Bemerkung 5.69 aus der Vorlesung*) (*2+(2+2+2) Punkte*)

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $(f_i)_{i\in I} \subset R_{loc}([a,\infty),\mathbb{R})$ eine Familie von lokal Riemann integrierbaren Funktionen. Es gebe $g \in R_{loc}([a,\infty),\mathbb{R})$ mit $\int_a^\infty g < \infty$ und mit $|f_i(x)| < g(x)$ für alle $i \in I$ und alle $x \in [a,\infty)$. Zeigen Sie, dass die uneigentlichen Integrale $\int_a^\infty f_i$ gleichmäßig konvergieren, d. h. dass die Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f_i$$

existieren und die Konvergenz gleichmäßig in $i \in I$ ist.

b) Wählen Sie **zwei** der folgenden Beispiele aus ($\alpha \in (0,1)$, $x \in [1,\infty)$):

(i) $f_\alpha(x) = \alpha\, x^{-(1+\alpha)}$

(ii) $f_\alpha(x) = \alpha^2\, x^{-(1+\alpha)}$

(iii) $f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in \left[\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}+1\right] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Berechnen Sie jeweils

$$\int_1^x f_\alpha \quad \text{und} \quad \int_1^\infty f_\alpha = \lim_{x\to\infty} \int_1^x f_\alpha$$

und untersuchen Sie, ohne Teilaufgabe a) zu verwenden, ob gleichmäßige Konvergenz vorliegt und ob eine Majorante g für die f_α existiert, d. h. eine Funktion g wie in Teilaufgabe a).

Aufgabe 9.4 (*Lemma 5.61 aus der Vorlesung*) (*3 Punkte*)

Beweisen Sie: Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f \in R_{loc}((a,b),\mathbb{R})$ mit $f \geq 0$. Existiert

$$\int_a^b f \quad \text{oder} \quad \lim_{\delta\downarrow 0} \int_{a+\delta}^{b-\delta} f,$$

so gilt

$$\int_a^b f = \lim_{\delta\downarrow 0} \int_{a+\delta}^{b-\delta} f.$$

Sei nun $f \in R_{loc}((-\infty,\infty),\mathbb{R})$ mit $f \geq 0$. Existiert

$$\int_{-\infty}^\infty f \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to\infty} \int_{-x}^x f,$$

so gilt

$$\int_{-\infty}^\infty f = \lim_{x\to\infty} \int_{-x}^x f.$$