Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, W. Maurer, M. Sani
Wintersemester 2015/16

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 1

Abgabe: Bis Donnerstag 29. Oktober 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis3-1516.html`

Aufgabe 1.1 (*4 Punkte*)

Seien E, F Banachräume und sei $\Omega \subset E$ offen und $f \in C^k(\Omega, F)$, $k \geq 1$, injektiv. Sei weiterhin $Df(x) \in L_{top}(E, F)$ für alle $x \in \Omega$. Beweisen Sie: $f(\Omega)$ ist offen und es gilt $f \in \operatorname{Diff}^k(\Omega, f(\Omega))$.
Sie erhalten 3 Punkte für den Fall $E = F = \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 1.2 (*4 Punkte*)

Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear mit $\operatorname{rk} A < n$. Zeigen Sie, dass es $m \in \mathbb{N}_{>0}$, eine Teilmenge $I \subset \{1, \ldots, n\}$ mit m Elementen und lineare Funktionen $\varphi^j : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$, $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$, mit $Ay(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^I$, wobei $y(x) = (y^i(x))_{1 \leq i \leq n}$ ist, mit

$$y^i(x) = \begin{cases} x^i, & i \in I, \\ \varphi^j(x), & j \notin I, \end{cases}$$

gibt.
Beweisen Sie dies zunächst mit Linearer Algebra und zeigen Sie dann, dass dies auch aus dem Satz über implizite Funktionen folgt.

Aufgabe 1.3 (*4+2 Punkte*)

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $|f(x)| \to \infty$ für $|x| \to \infty$. Sei $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\det Df(x) \neq 0$ für alle $x \in f^{-1}(\{y\})$.

(i) Zeigen Sie, dass es $\varepsilon > 0$ und zu jedem $x \in f^{-1}(\{y\})$ eine offene Umgebung U_x gibt, so dass $f|_{U_x} : U_x \to B_\varepsilon(y)$ ein Diffeomorphismus ist.
(ii) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(\{y\})$ nur aus endlich vielen Punkten besteht.
(iii) Zeigen Sie, dass die Umgebungen U_x paarweise disjunkt und so, dass

$$f^{-1}(B_\varepsilon(0)) = \bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} U_x$$

gilt, gewählt werden können.

Aufgabe 1.4 (*4+2 Punkte*)

Betrachten Sie die folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^{n \times n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \\ A &\longmapsto A^t A - \mathbb{1}. \end{aligned}$$

(i) Beschreiben Sie die Bildmenge $\operatorname{im}(\Phi)$ von Φ. Ist dies ein Unterraum von $\mathbb{R}^{n \times n}$?
(ii) Was ist $\Phi^{-1}(0)$?

(iii) Berechnen Sie die Ableitung $D\Phi(\mathbb{1})\langle B\rangle$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^{n\times n} \ni B \mapsto D\Phi(\mathbb{1})\langle B\rangle \in \mathrm{Sym}(n)$$

surjektiv ist.

(iv) Zeigen Sie, dass es ein $m \in \mathbb{N}$, eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^m$ mit $0 \in U$, eine Abbildung $\Psi\colon U \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\Psi(0) = \mathbb{1}$ und eine Umgebung V von $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\Phi^{-1}(0) \cap V = \operatorname{im}\Psi \cap V$ gibt.

(v) Zeigen Sie, dass es für jedes $A \in \Phi^{-1}(0)$ ein $m \in \mathbb{N}$, eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^m$ mit $0 \in U$, eine Abbildung $\Psi_A\colon U \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\Psi_A(0) = A$ und eine Umgebung V_A von A mit $\Phi^{-1}(0) \cap V_A = \operatorname{im}\Psi_A \cap V_A$ gibt.