Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, W. Maurer, M. Sani
Wintersemester 2015/16

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 10

Abgabe: Bis Donnerstag 14. Januar 2016, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis3-1516.html`

Aufgabe 10.1 (*4+2 Punkte*)

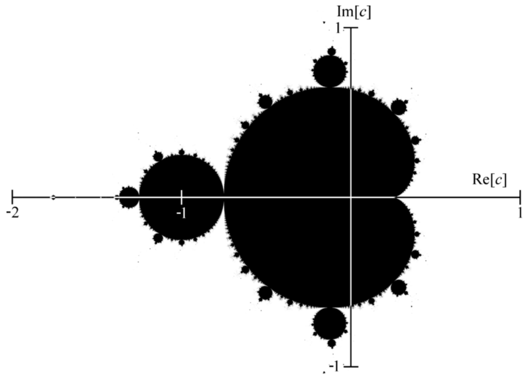
(i) Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und seien $f_i \colon X \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}^n$-messbare Funktionen, $i \in \mathbb{N}$. Zeige:

$$\{x \in X : \text{Die Folge } (f_i(x))_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \text{ ist beschränkt}\} \in \mathcal{A}.$$

(ii) Die *Mandelbrot-Menge* $\mathbb{M}$ ist die Menge aller komplexen Zahlen $c \in \mathbb{C}$, für welche die rekursiv definierte Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit dem Bildungsgesetz

$$z_0 = 0,$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

beschränkt bleibt. Zeige, dass die Mandelbrot-Menge eine Borelmenge ist.



Quelle: `https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge`
Hier findet sich auch weiteres, sehr schönes Anschauungsmaterial.

(iii) Zeige, dass $\mathbb{M} \subset \overline{B_2(0)}$ ist und für alle $c \in \mathbb{M}$ in der oben definierten Folge stets $|z_n| \le 2$ gilt.

Aufgabe 10.2 (*4 Punkte*)

Lies und verstehe Kapitel *10.4.4 Metrische Maße* im Skript. (In Definition 10.53 muss man „$\cap$“ durch „$\cup$“ ersetzen.) Erkläre die Beweisstrategie von Theorem 10.54. Fertige dazu auch eine beschriftete Skizze an, die der Anschauung und dem Verständnis des Beweises dienlich ist. Erkläre außerdem die erste Gleichheit in (iv), sowie $O \setminus O_n = \bigcup\limits_{j=n}^{\infty} A_j$ und $d(O_n \cap D, \complement O \cap D) \ge d(O_n, \complement O) \ge \frac{1}{n}$. Beweise schließlich noch die Umkehrung des Theorems: Gilt $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}(\mu^*)$, so ist das äußere Maß μ^* metrisch.

Aufgabe 10.3 *(4 Punkte)*

Seien $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Beweise:

(i) Jede offene Menge $O \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich als abzählbare Vereinigung von paarweise disjunkten Intervallen I_j der Form $(a, b]$ schreiben, $a, b \in \mathbb{Q}^n$. Es gilt

$$\lambda_n(O) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{Vol}_n(I_j).$$

Hinweis: Theorem 10.64 im Skript.

(ii) Es gilt $\mathcal{L}_m \otimes \mathcal{L}_n \subset \mathcal{L}_{m+n}$ und für $A \in \mathcal{L}_m$ und $B \in \mathcal{L}_n$ gilt $\lambda_{m+n}(A \times B) = \lambda_m(A) \cdot \lambda_n(B)$.
Hinweis: Betrachte zunächst offene Mengen A, B, dann kompakte und schließlich den allgemeinen Fall. Benutze Korollar 10.63 und die Vollständigkeit.

Aufgabe 10.4 Topologische Grundlagen I *(4 Punkte)*

Sei X ein Hausdorff-Raum. (Sie könen auch dann die volle Punktzahl erhalten, wenn Sie annehmen, dass X ein metrischer Raum ist.) Beweise:

(i) Sei $K \subset X$ kompakt und sei $p \in X \setminus K$. Dann gibt es offene Mengen U und W, so dass $p \in U$, $K \subset W$ und $U \cap W = \emptyset$ gelten.

(ii) Sei $(K_i)_{i \in I}$ eine Familie von kompakten Teilmengen von X für eine beliebige Indexmenge I, so dass $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$ gilt. Dann gibt es $i_1, \ldots, i_n \in I$, so dass bereits $K_{i_1} \cap \ldots \cap K_{i_n} = \emptyset$ gilt.

(iii) Sei X lokal kompakt. Es seien $U \subset X$ offen und $K \subset U$, wobei K kompakt ist. Dann gibt es eine offene Menge V, deren Abschluss $\overline{V}$ kompakt ist, so dass $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ gilt.
Hinweis: Finde im Fall $U \subsetneq X$ zunächst mit (i) zu $p \notin U$ eine Menge V_p mit $K \subset V_p \subset \overline{V_p}$, $p \notin \overline{V_p}$ und kompaktem Abschluss $\overline{V_p}$. Verwende dann (ii) mit $\overline{V_p} \cap \complement U$.