Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, W. Maurer, M. Sani
Wintersemester 2015/16

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 11

Abgabe: Bis Donnerstag, 21. Januar 2016, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis3-1516.html`

Aufgabe 11.1 *(4+**3** Punkte)*

(i) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, mit $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) < \infty$. Zeige, dass die Menge der $x \in X$, die in unendlich vielen der A_i enthalten sind, eine μ-Nullmenge ist.

(ii) Zeige oder widerlege: Es gibt einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mu(X) < \infty$ und eine Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) = \infty$, so dass für jedes $x \in X$ die Menge $\{i \in \mathbb{N} \colon x \in A_i\}$ endlich ist.

Aufgabe 11.2 *(4 Punkte)*

(i) Zeige, dass $x \sim y :\iff x - y \in \mathbb{Q}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ definiert.

(ii) Wähle mit Hilfe des Auswahlaxioms ein Repräsentantensystem $A \subset [0, 1)$ bezüglich dieser Äquivalenzrelation.

(iii) Zeige, dass A nicht Lebesgue-messbar ist, dass also $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gilt.
Hinweis: Stelle $\mathbb{R}$ mit Hilfe von A dar. Nehme dann an, dass $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ gilt, und zeige $\lambda(A) > 0$ in diesem Fall. Betrachte schließlich $\bigcup\limits_{x\in[0,1)\cap\mathbb{Q}} (x + A)$, um einen Widerspruch zu erhalten.

Aufgabe 11.3 Halbstetige Funktionen *(4 Punkte)*

Sei X ein topologischer Raum.
Eine Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *in $x_0 \in X$ oberhalbstetig*, falls gilt:

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le f(x_0).$$

Die Funktion f heißt *in $x_0 \in X$ unterhalbstetig*, falls gilt:

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \ge f(x_0).$$

Die Funktion f heißt *oberhalbstetig* bzw. *unterhalbstetig*, wenn sie in allen Punkten $x_0 \in X$ ober- bzw. unterhalbstetig ist.
Zeige:

(i) Ist X ein metrischer Raum, dann ist $f \colon X \to \mathbb{R}$ genau dann in x_0 oberhalbstetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U \in \mathcal{U}(x_0)\ \forall x \in U \colon f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

gilt. Wie lautet das analoge Resultat für unterhalbstetige Funktionen?

(ii) Eine Funktion $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann oberhalbstetig, wenn die Mengen $\{x \in X \colon f(x) < \alpha\}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ offen sind. Wie lautet das analoge Resultat für unterhalbstetige Funktionen?

(iii) Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn f oberhalb- und unterhalbstetig ist.

(iv) Sei $(f_i)_{i\in I}$ eine Familie von oberhalbstetigen Funktionen. Dann ist $\inf\limits_{i\in I} f_i$ oberhalbstetig. Wie lautet das analoge Resultat für unterhalbstetige Funktionen?

Aufgabe 11.4 Topologische Grundlagen II *(4 Punkte)*

Sei X ein topologischer Raum. Der *Träger* einer Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist der Abschluss der Menge $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$; er wird mit $\operatorname{supp} f$ bezeichnet (engl.: support). Den Vektorraum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger bezeichnen wir mit $C_c(X)$ oder $C_c^0(X)$.

Beweise folgenden Satz:

Sei X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, $U \subset X$ sei offen und $K \subset U$ sei kompakt. Dann gibt es eine Funktion $f \in C_c(X)$ mit $0 \leq f \leq 1$, so dass $\operatorname{supp} f \subset U$ und $f(x) = 1$ für alle $x \in K$ gilt.

Hinweise:

(i) Verwende Aufgabe 10.4 und eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, um induktiv eine Familie von offenen Mengen $\{V_q\}_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ mit folgenden Eigenschaften zu konstruieren: $K \subset V_1, \overline{V_0} \subset U$, jedes $\overline{V_q}$ ist kompakt und für $q > r$ gilt $\overline{V_q} \subset V_r$.

(ii) Definiere

$$f_q(x) = \begin{cases} q & x \in V_q, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad g_q(x) = \begin{cases} 1 & x \in \overline{V_q}, \\ q & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f = \sup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} f_q, \qquad g = \inf_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} g_q.$$

(iii) Zeige $f = g$ und verwende Aufgabe 11.3.