Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, W. Maurer, M. Sani
Wintersemester 2015/16

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 12

Abgabe: Bis Donnerstag, 28. Januar 2016, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis3-1516.html`

Aufgabe 12.1 (*4 Punkte*)

Seien $f, g, f_i \in \mathcal{L}^0(X, \mu, \overline{\mathbb{R}})$, $i \in \mathbb{N}$. Zeige, dass folgende Mengen in $\mathcal{A}$ liegen:

(i) $\{x \in X : f(x) < g(x)\}$,
(ii) $\{x \in X : f(x) \le g(x)\}$,
(iii) $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$,
(iv) $\{x \in X : f(x) \ne g(x)\}$,
(v) $\left\{x \in X : (f_i(x))_{i\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } \overline{\mathbb{R}}\right\}$.

Aufgabe 12.2 (*4 Punkte*)

(i) Beweise oder widerlege: $|f| \in \mathcal{L}^0(X, \mu, \overline{\mathbb{R}}) \Rightarrow f \in \mathcal{L}^0(X, \mu, \overline{\mathbb{R}})$.
(ii) Zeige, dass für $f \in \mathcal{L}^0(X, \mu, \mathbb{R}^n)$ auch

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)}{|f(x)|}, & f(x) \ne 0, \\ 0, & f(x) = 0 \end{cases}$$

μ-messbar ist.

Aufgabe 12.3 (*4 Punkte*)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^0(X, \mu, \mathbb{R})$ eine Folge, so dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine μ-messbare Menge $A \subset X$ mit $\mu(X \setminus A) < \varepsilon$ gibt, so dass $(f_n|_A)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

(i) Zeige, dass es eine Funktion $f \in \mathcal{L}^0(X, \mu, \mathbb{R})$ gibt, so dass $f_n \to f$ für $n \to \infty$ punktweise μ-fast überall gilt.
(ii) Zeige, dass $f_n(x) := x^n$ für $x \in [0, 1]$ die Voraussetzung erfüllt (bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $[0, 1]$), aber $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht μ-fast überall gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 12.4 (*4 Punkte*)

Gelte $\mu(X) < \infty$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^0(X, \mu, \mathbb{R})$ eine Folge, die punktweise konvergiert. Zeige, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine μ-messbare Menge $A \subset X$ mit $\mu(X \setminus A) < \varepsilon$ gibt, so dass $(f_n|_A)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.
Gib ein Gegenbeispiel für $\mu(X) = \infty$ an.
Hinweis: Betrachte für $f_n \to f$

$$S(n, k) := \bigcap_{i\ge n} \left\{x \in X : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\right\}$$

und zeige, dass $\mu(S(n, k)) \to \mu(X)$ *für* $n \to \infty$ *gilt. Wähle geeignete* n_k *und definiere* $A := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S(n_k, k)$.