Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, W. Maurer, M. Sani
Wintersemester 2015/16

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 13

Abgabe: Bis Donnerstag, 4. Februar 2016, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis3-1516.html`

Aufgabe 13.1 (*4 Punkte*)

Beweise Theorem 11.53 (ii) und (iii) aus der Vorlesung.

Aufgabe 13.2 (*4 Punkte*)

Wir definieren für eine Menge X auf $\mathcal{P}(X)$ das Zählmaß $\mathcal{H}^0$, das jeder Menge die Anzahl ihrer Elemente zuordnet.
Für $a \in X$ definieren wir auf $\mathcal{P}(X)$ das Dirac-Maß durch

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1 & \text{für } a \in A, \\ 0 & \text{für } a \notin A. \end{cases}$$

Charakterisiere die nachfolgenden Räume und berechne die Integrale von Funktionen in diesen Räumen bezüglich des entsprechenden Maßes.

(i) $\mathcal{L}^1(X, \delta_a, \mathbb{R})$,
(ii) $\mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathcal{H}^0, \mathbb{R})$,
(iii) $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}^0, \mathbb{R})$.

Hinweis: Untersuche, wie groß die Menge $\{x \in \mathbb{R} \colon f(x) \neq 0\}$ *für* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}^0, \mathbb{R})$ *sein kann.*

Aufgabe 13.3 (*4 Punkte*)

Nehme an, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$ erfüllt $f > 0$ μ-fast überall.
Zeige, dass für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$ bereits $\int\limits_A f \, d\mu > 0$ gilt.

Aufgabe 13.4 (*4 Punkte*)

Sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$.
Zeige, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\left| \int\limits_A f \, d\mu \right| < \varepsilon \text{ für alle } A \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(A) < \delta$$

gilt.
Hinweis: Benutze die Dichtheit der einfachen Funktionen im Raum $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$.