Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, W. Maurer, M. Sani
Wintersemester 2015/16

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 2

Abgabe: Bis Donnerstag 5. November 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis3-1516.html`

Aufgabe 2.1 (*4 Punkte*)

Zeigen Sie, dass es unter den Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen eine Umgebung A von (x_0, y_0) mit

$$\{(x,y) \in A : f(x,y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\} \cap A \equiv \operatorname{graph} \varphi \cap A$$

gibt, d. h. dass sich lokal die gesamte Menge $\{f = 0\}$ als $\operatorname{graph} \varphi$ beschreiben läßt. *Hinweis:* Benutzen Sie den Teil des Beweises des Satzes über implizite Funktionen, in dem wir die Eindeutigkeit von φ gezeigt haben.

Aufgabe 2.2 (*4 Punkte*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Sei c ein regulärer Wert von f. Zeigen Sie, dass es dann für jedes $x_0 \in M_c := f^{-1}(\{c\})$ eine offene Umgebung U von x_0, eine Translation T, eine orthogonale Abbildung O und eine Funktion $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^{n-1})$ gibt, so dass

(1) $M_c \cap U = (TO \operatorname{graph} \varphi) \cap U$,
(2) $TO(0) = x_0$, $\varphi(0) = 0$,
(3) $\nabla\varphi(0) = 0$ gelten und die Hessematrix $(\varphi_{ij}(0))_{1 \le i,j \le n-1}$ diagonal ist.

Aufgabe 2.3 (*3 +1 +2 +2 Punkte*)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.

(i) Sei $\operatorname{Gr}(k,n)$ die Menge aller k-dimensionalen Teilräumen von $\mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$\lambda_k := \inf_{V \in \operatorname{Gr}(k,n)} \sup_{x \in V \cap \mathbb{S}^{n-1}} \langle Ax, x \rangle.$$

Seien $\lambda_{k+1} \le \ldots \le \lambda_n$ die größten Eigenwerte von A mit Eigenvektoren $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$. Definiere $W := \langle \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n \rangle^\perp$.
Zeigen Sie, dass

$$\lambda_k = \sup_{x \in W \cap \mathbb{S}^{n-1}} \langle Ax, x \rangle$$

gilt, dass es $\xi_k \in W \cap \mathbb{S}^{n-1}$ mit

$$\lambda_k = \langle A\xi_k, \xi_k \rangle$$

gibt und dass ξ_k ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_k ist.

(ii) Folgern Sie, dass $\mathbb{R}^n$ eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von A besitzt.

(iii) Seien $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig und $A(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ symmetrisch. Seien $\lambda_1(t) \leq \ldots \leq \lambda_n(t)$ die Eigenwerte von A mit Vielfachheit. Beweisen Sie, dass

$$t \longmapsto \lambda_k(t)$$

für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ stetig ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$|\langle Ax, x\rangle - \langle Bx, x\rangle| \leq \|A - B\|_{L(\mathbb{R}^n)} \cdot \|x\|^2$$

und folgern Sie, dass für symmetrische Matrizen A, B mit $\|A - B\|_{L(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$

$$\langle Ax, x\rangle - \varepsilon \leq \langle Bx, x\rangle \leq \langle Ax, x\rangle + \varepsilon$$

für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt. Warum bleibt diese Ungleichung erhalten, wenn wir „$\sup\limits_{x\in V\cap\mathbb{S}^{n-1}}$" bzw. „$\inf\limits_{V\in \mathrm{Gr}(k,n)}$" darauf anwenden?

(iv) Sei

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{pmatrix}$$

und habe die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ Eigenwerte $\lambda_i, 1 \leq i \leq 3$, mit $|\lambda_i| \leq 1$ für alle $1 \leq i \leq 3$.

Zeigen Sie, dass $A + S$ einen Eigenwert im Intervall $[999, 1001]$ und zwei Eigenwerte im Intervall $[-2, 2]$ besitzt.

Hinweis: Bei dieser Aufgabe geht es darum, orthonormale Basen aus Eigenvektoren symmetrischer Matrizen zu finden. Die entsprechenden Diagonalisierbarkeitsresultate der Linearen Algebra sollen hier nicht benutzt, sondern noch einmal unabhängig von den dortigen Beweisen gezeigt werden.

Aufgabe 2.4 *(4 Punkte)*

(i) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x^1, \ldots, x^n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n x^i \end{aligned}$$

auf der Menge $\overline{B}_1(0)$.

(ii) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

auf der Menge

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{2} = 0 \right\}.$$