Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, W. Maurer, M. Sani
Wintersemester 2015/16

Universität
Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 3

Abgabe: Bis Donnerstag 12. November 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis3-1516.html`

Aufgabe 3.1 *(4 Punkte)*

Seien E ein Banachraum oder $E = \mathbb{R}^n$, $I = [0, t_0]$, $t_0 > 0$, ein beschränktes Intervall, $u : I \to E$ und $\beta \in \mathbb{R}$. Wir definieren die gewichtete Maximumsnorm von f durch $\|u\|_\beta := \max\limits_{t \in I} |u(t)| \cdot e^{-\beta t}$.

(i) Zeigen Sie, dass diese Vorschrift für alle $\beta \in \mathbb{R}$ tatsächlich eine Norm auf $C^0(I, E)$ definiert und dass diese zu der Maximumsnorm $\|x\|_0$ äquivalent ist.

(ii) Sei $f : I \times E \to E$ stetig, beschränkt und $(f(t, \cdot))_{t \in I}$ gleichmäßig Lipschitz-stetig. Definiere $T : C^0(I, E) \to C^0(I, E)$ durch

$$(T(x))(t) := x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau.$$

Seien alle weiteren Voraussetzungen wie im Satz von Picard-Lindelöf. Zeigen Sie, dass T eine Selbstabbildung und auf $(C^0(I, E), \|\cdot\|_\beta)$ für geeignetes $\beta > 0$ eine Kontraktion ist.

(iii) Folgern Sie aus (ii) die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems aus dem Satz von Picard-Lindelöf auf dem ganzen Intervall I.

Aufgabe 3.2 *(4 Punkte)*

(i) Sei E ein Banachraum oder $E = \mathbb{R}^n$. Seien $\Omega \subset E$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Wir betrachten das Anfgangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t, x) = f(t, \alpha(t, x)), \\ \alpha(0, x) = x \end{cases}$$

mit f wie im Satz von Picard-Lindelöf. Beweisen Sie, dass es eine gleichmäßige positive untere Schranke an die Existenzzeit von α für alle Startwerte $x \in K$ gibt.

(ii) Seien $u : [a, b] \to \Omega$ und $v : [b, c] \to \Omega$ stetige Lösungen der zur Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t))$$

äquivalenten Integralgleichung mit $u(b) = v(b)$ und stetiger Funktion f. Zeigen Sie, dass auch $w : [a, c] \to \Omega$ mit

$$w(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [a, b], \\ v(t), & t \in [b, c] \end{cases}$$

diese Differentialgleichung löst.

Aufgabe 3.3 *(4 Punkte)*

Seien $x, y : [0,T] \to \mathbb{R}$ Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \qquad \text{für } t \in [0,T].$$

Sei $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, im zweiten Argument lokal Lipschitzstetig und gelte $x(0) \leq y(0)$. Zeigen Sie, dass dann auch $x(t) \leq y(t)$ für alle $t \in [0,T]$ gilt.

Aufgabe 3.4 *(4 Punkte)*

Seien $x, y : [0,T] \to \mathbb{R}$ Lösungen der Differentialungleichungen

$$\dot{x}(t) \geq f(t, x(t)) \qquad \text{bzw.} \qquad \dot{y}(t) \leq f(t, y(t))$$

für $t \in [0,T]$. Sei $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, im zweiten Argument lokal Lipschitzstetig und gelte $x(0) \geq y(0)$. Zeigen Sie, dass dann auch $x(t) \geq y(t)$ für alle $t \in [0,T]$ gilt.

Hinweis: Die folgenden Ansätze führen zu unterschiedlichen Lösungen:

(1) Vergleichen Sie $\tilde{y}(t) := y(t) - \delta - \varepsilon t$ mit $x(t)$.

(2) Wenden Sie das Lemma von Gronwall auf $y - x$ in einem Intervall an, in dem diese Funktion nichtnegativ ist.