Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, W. Maurer, M. Sani
Wintersemester 2015/16

Universität
Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 4

Abgabe: Bis Donnerstag 19. November 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis3-1516.html`

Aufgabe 4.1 *(3+**1** Punkte)*

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 + x^2(t), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

(i) Finden Sie Konstanten M, L, r und ε, so dass der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf für $f(t,x) = 1 + x^2$, $t_0 = 0$ und $x_0 = 0$ für diese Konstanten funktioniert.

(ii) Berechnen Sie für die Funktion $x_0(t) \equiv 0$ die Iterationen x_k, $k \in \mathbb{N}$, mit $x_{k+1} := Tx_k$ und T wie im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf für $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(iii) Zeigen Sie, dass $x(t) = \tan t$ das Anfangswertproblem löst und vergleichen Sie die Taylor-Entwicklung von $\tan t$ mit $x_4(t)$.

Aufgabe 4.2 *(2 Punkte)*

Geben Sie positive untere und obere Schranken für die maximale Existenzzeit T des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sin(t) + x^3(t), \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

an und beweisen Sie, dass dies Schranken für T sind.

Aufgabe 4.3 *(3 Punkte)*

Sei x eine maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x^2(t) + 3x(t) - 2, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

für $x_0 \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie für beliebige Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}$, ob die maximale Existenzzeit T unendlich ist und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t \to T} x(t)$.

Hinweis: Es geht hier nicht darum das Anfangswertproblem explizit zu lösen.

Aufgabe 4.4 *(8+2 Punkte)*

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot\alpha(t) = (1+\alpha^2(t))(1-t\alpha(t)), \\ \alpha(0) = 1 \end{cases}$$

Beweisen Sie:

(i) Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung α auf dem Intervall $[0, \varepsilon]$.

(ii) Ist die maximale Existenzzeit T endlich, so gilt

$$\varlimsup_{t\to T} |\alpha(t)| = \infty.$$

(iii) Es gilt $\dot\alpha(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$ oder es gibt $t_0 \geq 0$ mit $t_0 \cdot \alpha(t_0) = 1$.

(iv) Es gibt $t_0 \geq 0$ mit $t_0 \cdot \alpha(t_0) = 1$.

(v) Gibt es $t_1 > 0$ mit $\alpha(t_1) \geq \frac{1}{t_1}$, so gelten $\alpha(t) \geq \frac{1}{t}$ und $\dot\alpha(t) \leq 0$ für alle $t \geq t_1$.

(vi) Die Lösung α existiert für $t \in [0, \infty)$ und es gilt

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\alpha(t)| < \infty.$$

(vii) Der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t)$ existiert. Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0.$$

Hinweis: Widerspruchsbeweis mit der Annahme $\alpha(t) \geq \varepsilon > 0$ für alle $t \geq t_2$, $t_2 > 0$.

(viii) Es gilt $t\alpha(t) \to 1$ für $t \to \infty$.
Hinweis: Betrachten Sie t mit $t\alpha(t) \geq 1 + \varepsilon$ und leiten Sie Differentialungleichungen für α und $t\alpha$ her.

(ix) Es gilt

$$\alpha(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} + \frac{2}{t^5} + \frac{6}{t^7} + \frac{27}{t^9} + \frac{178}{t^{11}} + \frac{1594}{t^{13}} + \frac{17967}{t^{15}} + o\left(\frac{1}{t^{16}}\right)$$

für $t \to \infty$. Beschreiben Sie, wie man auf solch eine Entwicklung kommen kann oder zeigen Sie eine solche Aussage mit etwas weniger Summanden.

Bemerkung: Solche oder ähnliche Untersuchungen über das Verhalten von Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung könnten das Thema Ihrer Bachelor- oder Staatsexamenarbeit werden.

Hinweis: Mit dem freien Programm sage (`www.sagemath.org`) und den folgenden Zeilen können Sie sich die Lösung graphisch veranschaulichen.

```
t,x=var('t x')
P=desolve_rk4((1+x^2)*(1t*x),x,ics=[0,1.0],ivar=t,output='plot',
end_points=[0,6],thickness=3,step=0.01)
P.show()
```