Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, W. Maurer, M. Sani
Wintersemester 2015/16

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 6

Abgabe: Bis Donnerstag 3. Dezember 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `http://www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis3-1516.html`

Aufgabe 6.1 *(4+**2** Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ beschränkt, glatt und Lipschitzstetig, d. h. gelte

$$\|f(t,x) - f(s,y)\| \le L\,(|t-s| + \|x-y\|)$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Sei α definiert durch

$$\begin{cases} \dot\alpha(t,x) = f(t,\alpha(t,x)), & t \in \mathbb{R}, \\ \alpha(0,x) = x. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass α wohldefiniert ist, d. h. insbesondere, dass $\alpha(\cdot, x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\alpha(1,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ein Diffeomorphismus ist.

(iii) Zeigen Sie die Behauptung ohne die Voraussetzung, dass f beschränkt ist.

Aufgabe 6.2 *(4+**3** Punkte)*

(i) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beweisen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:
  (a) e^{At} ist für alle $t \in \mathbb{R}$ orthogonal,
  (b) A ist schiefsymmetrisch, d. h. es gilt $A + A^t = 0$.

(ii) Seien $B \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ und $A \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Gelte $\dot B(t) = B(t)A(t)$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:
  (a) $B(t) \in O(n)$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
  (b) $B(0) \in O(n)$ und $A(t)$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ schiefsymmetrisch.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst ein $t \in \mathbb{R}$ mit $B(t) = \mathbb{1}$, schreiben Sie $B(t)$ in der Form $B(t) = B(t_0)C(t)$ und benutzen Sie Aufgabe 5.2.

Aufgabe 6.3 *(4 Punkte)*

Sei $T > 0$ und sei $f\colon [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$t \cdot |f(t,x) - f(t,y)| \le |x-y|$$

für alle $t \in [0,T]$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

(i) Seien $u, v \in C^1([0,T],\mathbb{R})$ mit $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ und $\dot{v}(t) = f(t, v(t))$ für alle $t \in [0,T]$ und sei $u(0) = v(0)$. Die Funktion $D\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ mit

$$D(t) = \begin{cases} \frac{|u(t)-v(t)|}{t}, & \text{falls } t \in (0,T], \\ 0, & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

ist stetig, und es gilt $t\,D(t) \leq \int_0^t D(\tau)\,d\tau$ für alle $t \in [0,T]$.

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$. Es gibt höchstens ein $u \in C^1([0,T],\mathbb{R})$ mit $u(0) = a$ und $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ für alle $t \in [0,T]$.

Aufgabe 6.4 *(4 Punkte)*

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ beliebig. Sei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

Bestimmen Sie in den folgenden Fällen eine Basis der Menge aller Lösungen von $\dot{x}(t) = Ax(t)$ und zeichnen Sie jeweils

- Ap für verschiedene $p \in \mathbb{R}^2$ als Vektor in $\mathbb{R}^2$,
- zwei spezielle Lösungen x.

(i) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$