Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, W. Maurer, M. Sani
Wintersemester 2015/16

Universität
Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 7

Abgabe: Bis Donnerstag 10. Dezember 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis3-1516.html`

Aufgabe 7.1 (*4 Punkte*)

Gegeben sei das System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - y + (x-y)\sin(x-1) + 4, \\ \dot{y} = x - 2y + (x-1)^3 + 2(y-1)^2 + 1. \end{cases}$$

Untersuchen Sie das System auf asymptotische Stabilität der Lösung $x(t) = y(t) = 1$ für alle t.

Aufgabe 7.2 (*4+2 Punkte*)

Untersuchen Sie, ob $A, B \in \mathbb{R}$ so gewählt werden können, dass $L(x,y) := Ax^2 + By^2$ eine Lyapunovfunktion für je eines der folgenden Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen wird.

(i) $\begin{cases} \dot{x} = -3y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 5y^3, \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} \dot{x} = -2xy, \\ \dot{y} = x^2 - y^3, \end{cases}$ **(iii)** $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 4y^2, \\ \dot{y} = -y - xy. \end{cases}$

Was lässt sich damit über die Stabilität, asymptotische Stabilität oder Instabilität der Lösung $x(t) = y(t) = 0$ für alle t sagen?

Aufgabe 7.3 (*4 Punkte*)

Sei $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass jede Funktion $x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

in ganz $\mathbb{R}$ monoton steigend oder monoton fallend ist.

Aufgabe 7.4 (*4+2 Punkte*)

Bestimmen Sie die allgemeinen reellen Lösungen für die folgenden Differentialgleichungen

(i) $\dddot{x}(t) + \ddot{x}(t) - \dot{x}(t) - x(t) = 0,$
(ii) $\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0,$
(iii) $\left(\frac{d}{dt}\right)^5 x(t) + \left(\frac{d}{dt}\right)^4 x(t) - \frac{d}{dt}x(t) - x(t) = 0.$

Hinweis: $e^{\lambda t}$-Ansatz.

Aufgabe 7.5 (*4 Punkte*)

Sei $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^n)$. Seien $a > b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Definiere $\Omega_c := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) < c\}$. Sei $\delta > 0$ und gelte

$$\|\nabla\varphi(x)\| \geq \delta \qquad \text{und} \qquad \|D^2\varphi(x)\| \leq c$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $B_2(x) \cap (\Omega_a \setminus \Omega_b) \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass es einen C^1- Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(\Omega_a) = \Omega_b$ gibt.

Hinweis: Untersuchen Sie Lösungen α einer Differentialgleichung mit

$$\frac{d}{dt}\varphi(\alpha(t)) = -1$$

für $\alpha(t) \in \Omega_a \setminus \Omega_b$ und $\dot{\alpha}(t) = 0$ falls $B_2(\alpha(t)) \cap (\Omega_a \setminus \Omega_b) = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 7.6 (*4 Punkte*)

Zeichnen Sie in einem Koordinatensystem mit $-7 \leq x \leq 7$ und $0 \leq y \leq 14$ die intervallweise gefundenen Lösungen der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

In Braun:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x,y) = f(t,x,y), \quad (x,y)(0) = (-1,2),$$

wobei

$$f(t,x,y) = \begin{cases} (0,-2), & 0 < t < 1, \\ (2,0), & 1 < t < 2, \\ (0,2), & 2 < t < 3. \end{cases}$$

In Grün:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x,y) = f(t,x,y), \quad (x,y)(0) = (0,14),$$

wobei

$$f(t,x,y) = \begin{cases} (-(x+2)\cdot\log 5, 4) & -5 < t < -4, \\ (-3,0) & -4 < t < -3, \\ (-(x+1)\cdot\log 5, 4) & -3 < t < -2, \\ (-2,0) & -2 < t < -1, \\ (-(x-1)\cdot\log 5, 4) & -1 < t < 0, \\ ((x+1)\cdot\log 5, -4) & 0 < t < 1, \\ (-2,0) & 1 < t < 2, \\ ((x-1)\cdot\log 5, -4) & 2 < t < 3, \\ (-3,0) & 3 < t < 4, \\ ((x-2)\cdot\log 5, -4) & 4 < t < 5, \\ (-14,0) & 5 < t < 6. \end{cases}$$

In Rot:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-y,x)$$

für $t \in [0,2\pi]$ zu folgenden drei Sätzen der Anfangsbedingungen:

(1) $(x,y)(0) = (-2,3)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x,y) = (1,0)$,
(2) $(x,y)(0) = (2,3)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x,y) = (1,0)$,
(3) $(x,y)(0) = (0,10)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x,y) = (1,0)$.

Zeichnen Sie schließlich die Lösung von

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für $t \in [0,2\pi]$ mit der Anfangsbedingung $(x,y,\dot{x},\dot{y},\ddot{x},\ddot{y})(0) = (0,8,2,0,0,-9)$.

Hinweis: Diese Aufgabe darf bis Dienstag, 22.12.2015, 9.55 Uhr, abgegeben werden.