Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, W. Maurer, M. Sani
Wintersemester 2015/16

Universität
Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 8

Abgabe: Bis Donnerstag 17. Dezember 2015, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis3-1516.html`

Aufgabe 8.1 *(4 Punkte)*

(i) Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra auf X. Für $Y \subset X$ definieren wir
$$\mathcal{A}|_Y := \{A \cap Y \colon A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}(Y).$$
Zeige, dass $\mathcal{A}|_Y$ eine σ-Algebra auf Y ist, die sogenannte *Spur-σ-Algebra*.

(ii) Sei X eine Menge und $A \subset X$. Zeige, dass $\mathcal{A} := \{B \subset X \colon A \subset B \text{ oder } A \subset \complement B\}$ eine σ-Algebra ist.

(iii) Gegeben sei die Obermenge $X = \{0, 1, 2, 3\}$. Bestimme $\mathcal{A}_\sigma(\{\{0\}, \{1\}\})$.

(iv) Sei $A \subset X$. Bestimme $\mathcal{A} := \mathcal{A}_\sigma(\{A\})$, $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{A}$ sowie $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Wann ist $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{A}$ eine σ-Algebra?

Aufgabe 8.2 *(3 Punkte)*

Seien $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{P}(X)$ zwei Mengensysteme. Welche Inklusionen gelten zwischen $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)$, $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}_1) \cap \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}_2)$ und $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}_1) \cap \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}_2))$? Wie sieht es für „$\cup$“ aus? Ist die Vereinigung zweier σ-Algebren über X stets eine σ-Algebra?

Aufgabe 8.3 *(3 Punkte)*

Sei ein Mengensystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ gegeben. Beweise
$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}) = \bigcup \{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{T}) \colon \mathcal{T} \subset \mathcal{S} \text{ höchstens abzählbar}\}.$$

Aufgabe 8.4 *(4 Punkte)*

Seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ und $(Z, \mathcal{C})$ messbare Räume. Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ heißt *$\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar*, falls für alle $B \in \mathcal{B}$ auch $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ gilt.
Beweise:

(i) Sind $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar bzw. $\mathcal{B}$-$\mathcal{C}$-messbar, dann ist $g \circ f$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-messbar.

(ii) Sei $A \subset X$ und sei $f \colon X \to Y$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar. Dann ist die Einschränkung $f|_A \colon A \to Y$ $\mathcal{A}|_A$-$\mathcal{B}$-messbar.

(iii) Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ ein Mengensystem. Dann ist $f \colon X \to Y$ genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})$-messbar, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{S}$ gilt.

(iv) Seien X und Y topologische Räume und $f \colon X \to Y$ stetig. Dann ist f Borel-messbar, d.h. f ist $\mathcal{B}(X)$-$\mathcal{B}(Y)$-messbar.

Aufgabe 8.5 *(2 Punkte)*

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [-\infty, \infty]$ eine Folge. Zeige

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} x_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} x_n$$

und folgere, dass auch

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} x_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} x_n$$

gilt.

Erinnerung: $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *ist als der größte Häufungspunkt von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definiert.*

Aufgabe 8.6 *(4 Punkte)*

(i) Sei E ein vollständiger metrischer Raum. Seien $U_n \subset E$ offen und dicht ($n \in \mathbb{N}$). Zeige, dass $U := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset E$ dicht ist.
Hinweis: Eine Menge ist genau dann dicht, wenn sie jeden Ball schneidet.

(ii) Zeige, dass U im Fall $E = \mathbb{R}$ überabzählbar ist.
Hinweis: Verwende (i) für einen Widerspruchsbeweis.

(iii) Folgere, dass $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine F_σ-Menge aber keine G_δ-Menge ist.