Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, W. Maurer, M. Sani
Wintersemester 2015/16

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Blatt 9

Abgabe: Bis Donnerstag 7. Januar 2016, 9:55 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Webseite: `www.math.uni-konstanz.de/diffgeom/analysis3-1516.html`

Aufgabe 9.1 (*2 Punkte*)

Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Folge in einer Menge X und sei $(m_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Zeige, dass

$$\mu(A) := \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ x_i\in A}} m_i$$

ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$ definiert.

Aufgabe 9.2 (*2 Punkte*)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge mit $A_j \supset A_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, und $\mu(A_0) < \infty$. Laut Theorem 10.29 (v) aus der Vorlesung gilt $\mu(A_k) \searrow \mu\left(\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j\right)$ für $k \to \infty$.
Zeige durch ein Gegenbeispiel, dass man die Bedingung $\mu(A_0) < \infty$ nicht weglassen kann.

Aufgabe 9.3 (*6 Punkte*)

Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *Ring*, falls $\mathcal{R}$ folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$,
(ii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$,
(iii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Zeige, dass für $A, B \in \mathcal{R}$ auch $A \cap B \in \mathcal{R}$ gilt.
Eine Mengenfunktion $\mu\colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ heißt *Prämaß*, falls $\mu(\emptyset) = 0$ gilt und μ σ-additiv ist, d. h. für jede Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ von paarweise disjunkten Mengen, für die $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{R}$ gilt, folgt

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Das Prämaß μ heißt σ-endlich, falls es eine Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $\mu(A_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$, gibt, die $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i = X$ erfüllt.
Beweise folgende Version des *Erweiterungs- und Fortsetzungssatzes von Carathéodory*: Sei $\mathcal{R}$ ein Ring mit Prämaß μ. Dann gibt es ein Maß $\tilde{\mu}$ definiert auf $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$ mit $\tilde{\mu}|_{\mathcal{R}} = \mu$. Ist μ σ-endlich, dann ist $\tilde{\mu}$ eindeutig.
Anleitung: Zeige

a) $\mu^*(A) := \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) \colon B_i \in \mathcal{R},\ A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right\}$ ist ein äußeres Maß, das μ fortsetzt.
b) Jedes $A \in \mathcal{R}$ ist μ^*-messbar. Benutze dann Theorem 10.50, um den ersten Teil des Satzes zu beweisen.
c) Für die Eindeutigkeitsaussage zeige, dass jedes weitere solche Maß ν schon $\nu \le \tilde{\mu}$ erfüllt, wobei $\tilde{\mu}$ das eben konstruierte Maß ist. Nehme dann vorerst an, dass μ endlich ist und folgere durch Betrachtung von Komplementen $\nu = \tilde{\mu}$ in diesem Fall. Erweitere das Argument dann für den Fall, dass μ nur σ-endlich ist.

Aufgabe 9.4 *(6 Punkte)*

Nach Theorem 10.35 ist für $s > 0$ und $\varepsilon > 0$

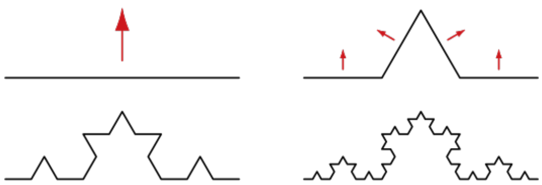
$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) := \inf\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam}(O_j))^s \colon O_j \subset \mathbb{R}^n \text{offen, } \operatorname{diam}(O_j) < \varepsilon \text{ und } A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} O_j\right\}$$

ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$.
Beweise:

(i) Für $A \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{H}^s_\varepsilon(A)$ monoton fallend in ε. Damit ist das s-dimensionale äußere Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^s_*(A) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon \in [0,\infty]$ wohldefiniert.
(ii) $\mathcal{H}^s_*$ ist monoton fallend in $s > 0$.
(iii) Für $A \subset \mathbb{R}^n$ gibt es ein $d \ge 0$, so dass

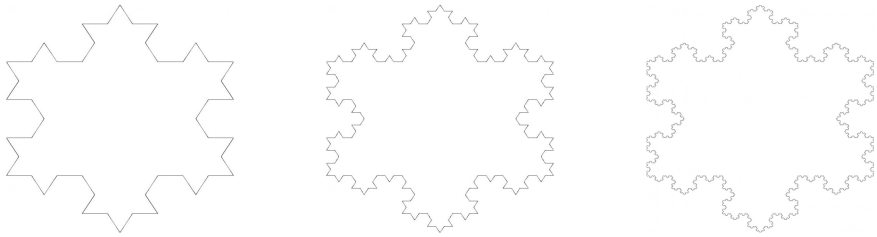
$$\mathcal{H}^s_*(A) = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < s < d \\ 0 & \text{für } d < s \end{cases}$$

gilt. d heißt *Hausdorff-Dimension von A*.
Hinweis: Zeige, dass aus $\mathcal{H}^r_*(A) < \infty$ bereits $\mathcal{H}^s_*(A) = 0$ für alle $s > r$ folgt. Zeige außerdem $\mathcal{H}^{n+1}_*([0,1]^n) = 0$.
(iv) Wir betrachten folgenden Iterationsprozess: Beginnend mit einem Streckenstück ersetzen wir dieses durch 4 Streckenstücke mit jeweils einem Drittel der Länge. Folgende Abbildung zeigt die ersten drei Iterationen:



Quelle: `https://de.wikipedia.org/wiki/Koch-Kurve`

Die Koch-Kurve K ist der Grenzwert dieser Iteration (definiert als die Menge der Häufungspunkte der Iteration oder als Grenzwert in der Hausdorff-Metrik (siehe Analysis I, Aufgabe 13.4 (v))).
Zeige: $\mathcal{H}^d_*(K) < \infty$ für $d \ge \frac{\log 4}{\log 3}$, d. h. die Hausdorff-Dimension der Koch-Kurve ist durch $\frac{\log 4}{\log 3}$ nach oben beschränkt.
Hinweis: Die Koch-Kurve kann man aus vier um den Faktor 3 kleineren Koch-Kurven zusammensetzen. Das ist alles, was man für diese Aufgabe über die Koch-Kurve wissen muss.



Approximationen der Kochschen Schneeflocke, die aus drei Kochkurven zusammengesetzt ist.

Aufgabe 9.5 (*4 Punkte*)

Sei $X = \mathbb{R}^2$. Zeige, dass die Linie $L := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\}$ nicht $\mathcal{H}^1_4$-messbar ist.

Hinweis: Betrachte die Menge $D := L \cup (L + e_2)$.

Aufgabe 9.6 Helfende Elfen (*4 Punkte*)

Die Weihnachtselfen waren dieses Jahr wieder überaus fleißig. Sie haben unendlich viele verschiedene Geschenkartikel hergestellt und von jedem Artikel unendlich viel. Nun geht es für die abzählbar vielen Elfenhelfer darum, die Geschenke zu verpacken. Jeder Elf soll beim Verpacken gewisser Geschenkartikel mithelfen und es soll keine zwei Elfen geben, die genau dieselben Geschenkartikel verpacken. Damit alle Geschenkartikel gleichmäßig eingepackt werden, fordert der Weihnachtsmann, dass sich jeder Elf einen Partner sucht, so dass der eine Elf genau die Geschenkartikel einpackt, bei denen der andere nicht mithilft. Weiter fordert der Weihnachtsmann, der kurz vor Weihnachten immer unter enormen Stress steht, dass es zu jeder Gruppe von Elfen einen Elfen gibt, der genau die Geschenkartikel verpacken hilft, die die Gruppe zusammen verpackt. Die Elfen fangen sofort an, sich die Arbeit aufzuteilen. Aber es will ihnen nicht so recht gelingen. Ein findiger kleiner Elf denkt an die Geschenkartikel, die von genau denselben Elfen verpackt würden. Dabei fällt ihm auf, dass eine solche oben beschriebene Arbeitsverteilung mit abzählbar vielen Kollegen nicht möglich ist. Hilf den Elfen und beweise dem Weihnachtsmann, dass der kleine Elf Recht hat.