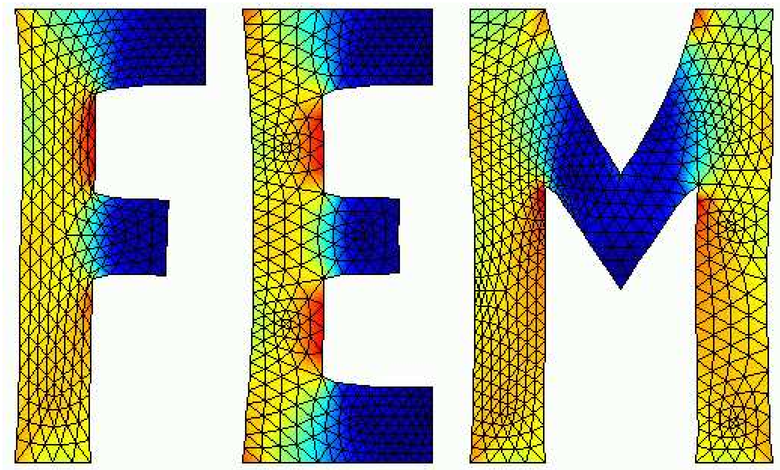


Praktikum

Vita Rutka

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik & Statistik
AG Numerik

WS 2007

Block 1

jeder Anfang ist eindimensional

Was ist FEM?

"Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Lösung, insbesondere elliptischer partieller Differentialgleichungen mit Randbedingungen. Sie ist auch ein weit verbreitetes modernes Berechnungsverfahren im Ingenieurwesen."

[Wikipedia]

So kam es dazu...

- Anfänge: Courant ('42), Argyris ('54), Turner et al ('56), Clough ('60, Begriff "FE"), Zienkewitz ('65, das 1. Buch)
- Diverse Ingenieuranwendungen in den späten 60'ern, frühen 70'ern
- 1970+: Anfänge kommerzieller FEM-Software (Ansys, Abaqus, etc)

Heute: unzählige (freie & kommerzielle) Software, Anzahl der Forscher (Ingenieure, Mathematiker, Informatiker) $\nearrow \infty$, das populärste Werkzeug

Wo kommen elliptische (u.ä.) Gleichungen vor?

Einige Beispiele:

- Temperaturverteilung:

$$\Delta u = 0$$

- Lamé-Navier Gleichungen in Elastizität mit $\mathbf{u} = (u, v)$:

$$-\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = f$$

  (u, v): Komponenten der Verschiebung, f: innere Kraft, λ, μ: Lamé Koeffizienten

- Navier-Stokes Gleichungen der Strömungsmechanik

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \frac{1}{\rho} \nabla p &= f \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

  $u = (u, v)$: Geschwindigkeit, p: Druck, ν: Viskosität, ρ: Dichte

Unsere “Grundgleichung”

Poisson (Laplace) Problem

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

mit Randbedingungen

$$u = u_D \quad \text{auf } \partial\Omega_D \quad , \quad \partial_n u = g \quad \text{auf } \partial\Omega_N$$

(Dirichlet bzw. Neumann Randbedingungen)

Wichtig: $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$

Grundidee in 1D

. . . aus der Sicht eines Mathematikers. . .

Zu lösen: $u'' = f \text{ in } \Omega = (0,1) \quad , \quad u(0) = u(1) = 0$

“Trick”: $u'' \cdot v = f \cdot v \quad \text{für alle } v \quad + \quad \text{Integration:}$

$$\int_\Omega u'' \cdot v = \int_\Omega f \cdot v$$

für “ausreichend glatte” v’s:

$$(u' \cdot v)' = u'' \cdot v + u' \cdot v' \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega u'' \cdot v = \int_\Omega (u' \cdot v)' - u' \cdot v' = u' \cdot v|_1 - u' \cdot v|_0 - \int_\Omega u' \cdot v'$$

Nehme v: $v(0) = v(1) = 0 \Rightarrow$ **schwache Formulierung:** suche u, so dass

$$-\int_\Omega u' \cdot v' = \int_\Omega f \cdot v \quad \forall v : \underbrace{\text{Integrale } \int_\Omega v^2 \text{ und } \int_\Omega (v')^2 \text{ “machen Sinn”}}_{\text{“Sobolevraum” } H_0^1(\Omega)}$$

Grundidee in 1D

Die schwache Formulierung: suche $u \in H_0^1(\Omega) =: V$ so dass

$$\underbrace{-\int_\Omega u' \cdot v'}_{\text{“Bilinearform” } a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f \cdot v}_{\text{“Funktional” } F(v)} \qquad \forall v \in V$$

Problem: V: unendlichdimensional!

Lösung: ersetze V durch ein **endlichdimensionales** V_h. Suche $u_h \in V_h$:

$$a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h$$

Beispiele:

$V_h := \operatorname{span}\{\sin(\pi n x) \mid n \in \{0, 1, 2, \ldots 10\}\}$, $\dim(V_h) = 11$

V_h: Raum der Stückweise linearen Funktionen mit Stützstellen $0,\ 0.2,\ 0.4, 0.7,\ 0.8,\ 1$, $\dim V_h = 4$ (nur die inneren Knoten)

Grundidee in 1D

Zu lösen: $$a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h$$

Ritz-Galerkin: Sei $\{\phi_1, \dots \phi_N\}$ eine Basis von V_h. Dann $u_h = \sum_{i=1}^{N} v_j \phi_j \quad , \quad v_j =?$

Verlange: $$a(u_h, \phi_i) = F(\phi_i) \quad \forall i \in \{1, \dots N\}$$

Beachte:

$$a(u_h, \phi_i) = a(\sum_{j=1}^{N} v_j \phi_j, \phi_i) = -\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{N} v_j \phi_j \right)' \cdot \phi_i' = -\sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \left(\phi_j' \cdot \phi_i' \right) v_j$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a(\phi_j, \phi_i) v_j \overset{!}{=} F(\phi_i)$$

Mit $A = (A_{ij}) = (a(\phi_j, \phi_i))$, $b = (b_i) = (F(\phi_i))$ und $v = (v_i)$:

$$\boxed{\underbrace{A}_{\text{Steifigkeitsmatrix}} v = \underbrace{b}_{\text{Ladevektor}}}$$

Grundidee in 1D

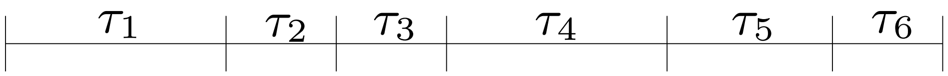
Zu lösen: $$Av = b$$

Wünschenswert:

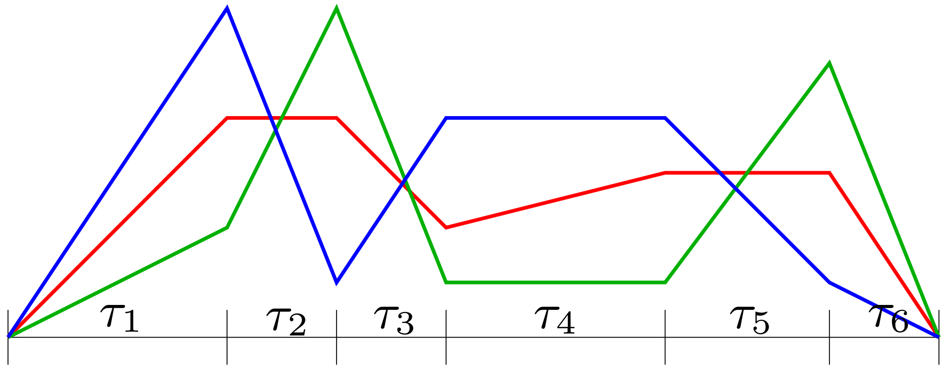
- die Berechnung von A_{ij} soll möglichst einfach sein
- die Matrix A soll möglichst schwachbesetzt sein

FEM:

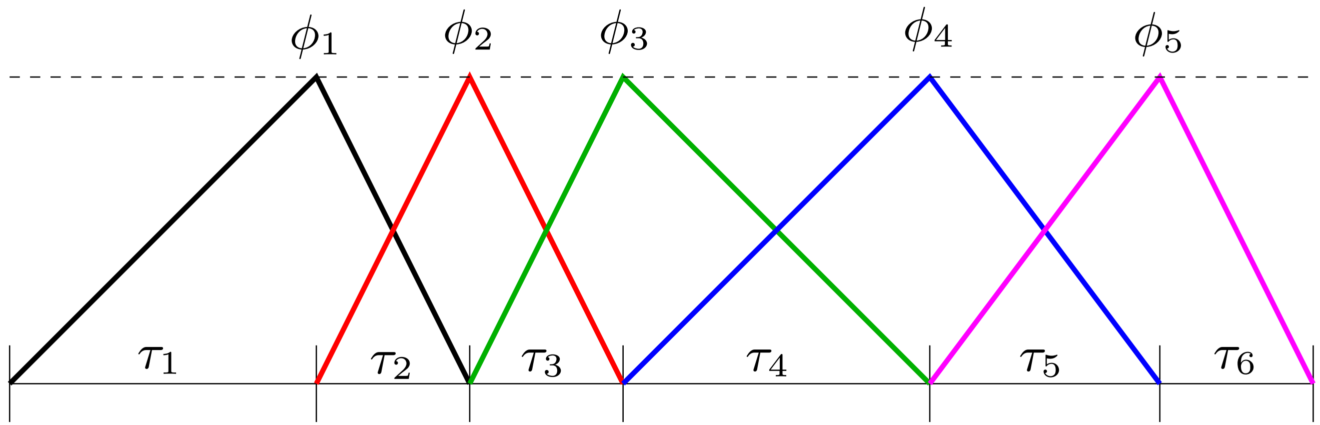
- Zerlege Ω in endlich viele Teilmengen (“Elemente”): $\bar{\Omega} = \cup_{\tau \in T_h} \tau$



- Die Räume V_h enthalten Funktionen, deren Einschränkungen auf $\tau \in T_h$ Polynome sind. Beispiel (stückweise lineare Funktionen):



- Basisfunktionen $\phi_1, \ldots, \phi_N$ von V_h sollten einfach zu berechnen sein und einen möglichst kleinen Träger haben. Beispiel (“Hütchenfunktionen”):



Zusammenfassung:

- kontinuierliches Problem:

$$u'' = f \quad \text{in } \Omega = (0,1) \quad , \quad u(0) = u(1) = 0$$

- schwache Formulierung:

$$a(u,v) := -\int_\Omega u' \cdot v' = \int_\Omega f \cdot v =: F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

- FEM: Suche $u \in V_h$:

$$a(u_h, \phi_i) = F(\phi_i)$$

  $\phi_1, \ldots \phi_N$: eine Basis von V_h (Hütchenfunktionen)

Neumannsche Randbedingungen

Beispiel:

$$u'' = f \quad \text{in } \Omega = (0,1) \quad , \quad u(0) = 0 \; , \; u'(1) = b$$

Vorgehensweise ähnlich wie vorher. Der Unterschied:

$$\int_0^1 u'' \cdot v = u' \cdot v|_0^1 - \int_0^1 u' \cdot v' = u'(1) \cdot v(1) - u'(0) \cdot v(0) - \int_0^1 u' \cdot v'$$

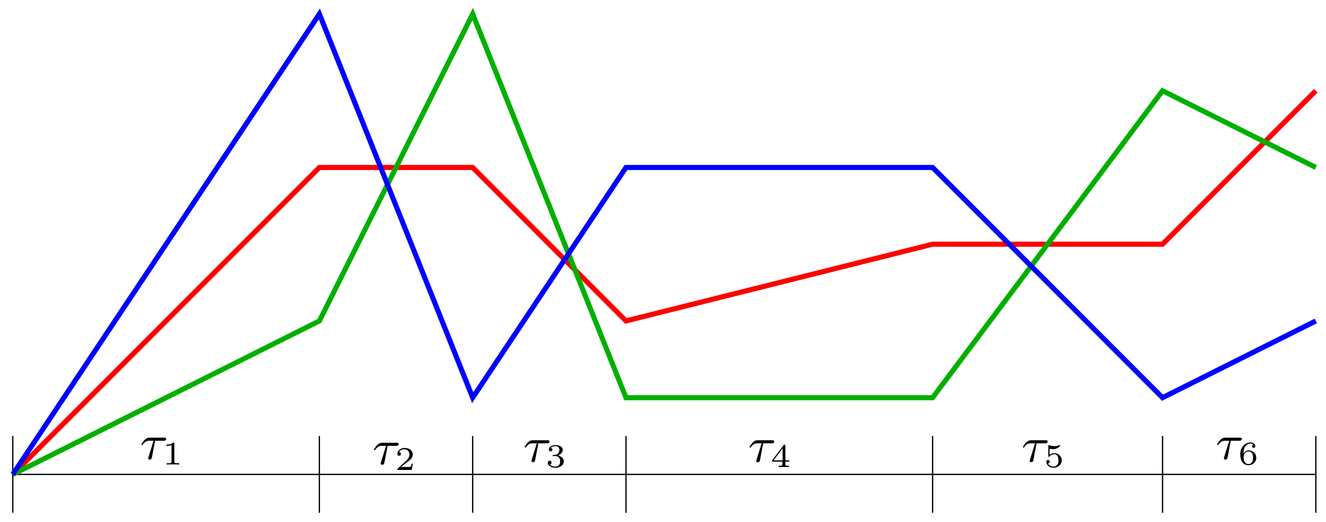
$$= b \cdot v(1) - \int_0^1 u' \cdot v'$$

Schwache Formulierung:

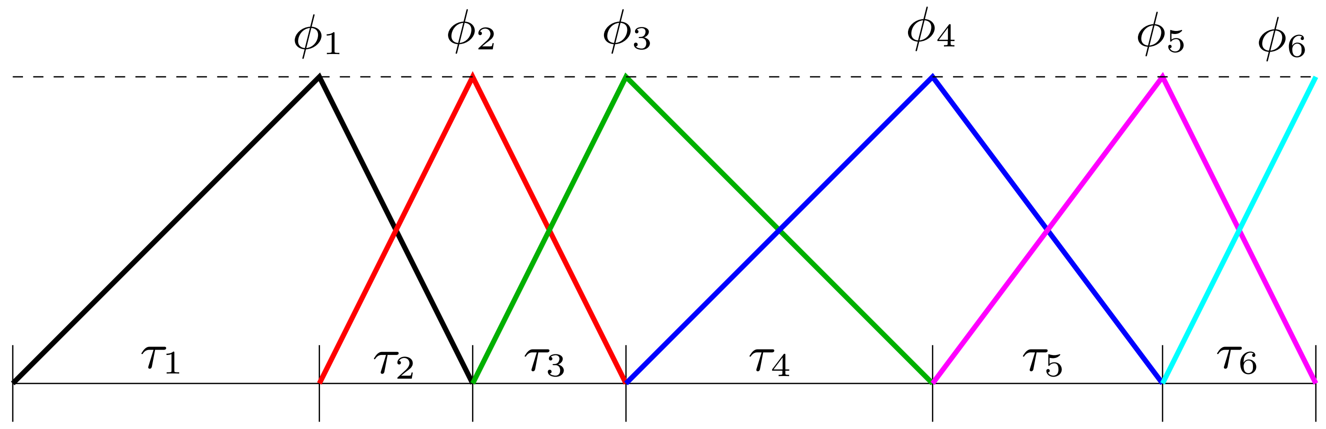
$$\underbrace{-\int_0^1 u' \cdot v'}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f \cdot v - b \cdot v(1)}_{F(v)} \quad \forall v \in H^1((0,1)) : \; v(0) = 0$$

FEM: ein Freiheitsgrad mehr (an $x = 1$):

Raum V_h:



Basisfunktionen:



Fragen für heute

1. Gleichung $u'' + cu = f$ in $\Omega = (0, 1)$, $u(0) = a$, $u(1) = b$

   (a) Die schwache Formulierung? (Hinweis: reduzieren Sie die Aufgabe auf ein homogenes Dirichlet Problem in dem Sie eine Hilfsfunktion w: $w(0) = a$, $w(1) = b$ einführen!)

   (b) Berechnen Sie (analytisch) die Einträge der Steifigkeitsmatrix A und des Ladevektors b. Die Positionen der Knoten ist zufällig, benutzen Sie stückweise lineare Funktionen mit Hütchenfunktionen als Basis (wie im Beispiel vorher)

   (c) Implementieren Sie die resultierende FEM mit

      i. $f = 2$ in Ω

      ii. $f(x) = \exp(\sin(5\pi x)$ in Ω

2. Gleichung $u'' + cu = f$ in $\Omega = (0, 1)$, $u(0) = a$, $u'(1) = b$. Implementieren Sie die gleichen FEM für dieses Fall! Welche Unterschiede sind vorhanden?

Fragen zum überlegen

1. Für welche c's ist das 1. Problem eindeutig (diskret) lösbar? (Ausprobieren mit N: klein). Welches Vorzeichen von c kann problematisch werden?

2. Welchen Struktur hat die Steifigkeitsmatrix A?