Block 2

die Welt der bunten Bilder – zweidimensionale Probleme

FEM in 2D: Schwache Formulierung

1D:

Kontinuierliches Problem: $u'' = f$ in $\Omega = (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$

Schwache Formulierung:

Multipliziere die Gleichung mit einer Funktion v und integriere

FEM: wähle v diskret (z.B., stückweise lineare Funktionen)

2D: genauso!!

Zu lösen: $\partial_{xx}u + \partial_{yy}u = \nabla \cdot \nabla u = f$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$

Beachte: $\partial_{xx}u + \partial_{yy}u = (\partial_x, \partial_y) \cdot (\partial_x u, \partial_y u) = \nabla \cdot \nabla u$

Schwache Formulierung:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla u &= f \\ (\nabla \cdot \nabla u) \cdot v &= f \cdot v \\ \int_\Omega (\nabla \cdot \nabla u) \cdot v &= \int_\Omega f \cdot v \end{aligned}$$

Beachte: $\nabla \cdot (\nabla u \cdot v) = (\nabla \cdot \nabla u) \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v$

Damit

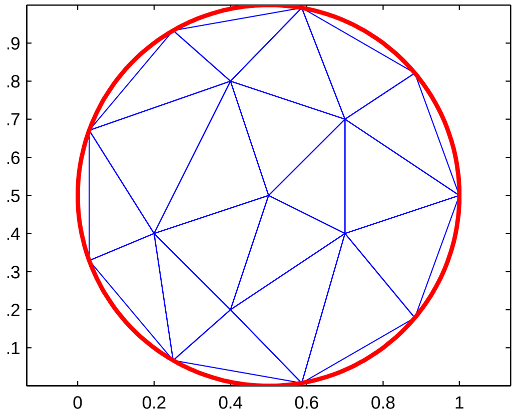
$$\int_\Omega (\nabla \cdot \nabla u) \cdot v = \int_\Omega \nabla \cdot (\nabla u \cdot v) - \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot v) \cdot n - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

$\Rightarrow$ die schwache Formulierung

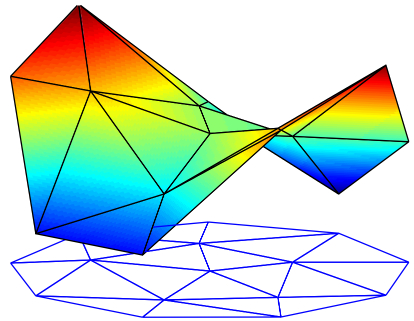
$$\underbrace{-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v}_{\text{Bilinearform } a(u,v)} = \underbrace{\int_\Omega f \cdot v}_{\text{Funktional } F(v)} \quad \forall \quad \underbrace{v \in H_0^1(\Omega)}_{\text{d.h. } \int_\Omega v^2 < \infty \text{ und } \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v < \infty}$$

FEM in 2D: Diskretisierung

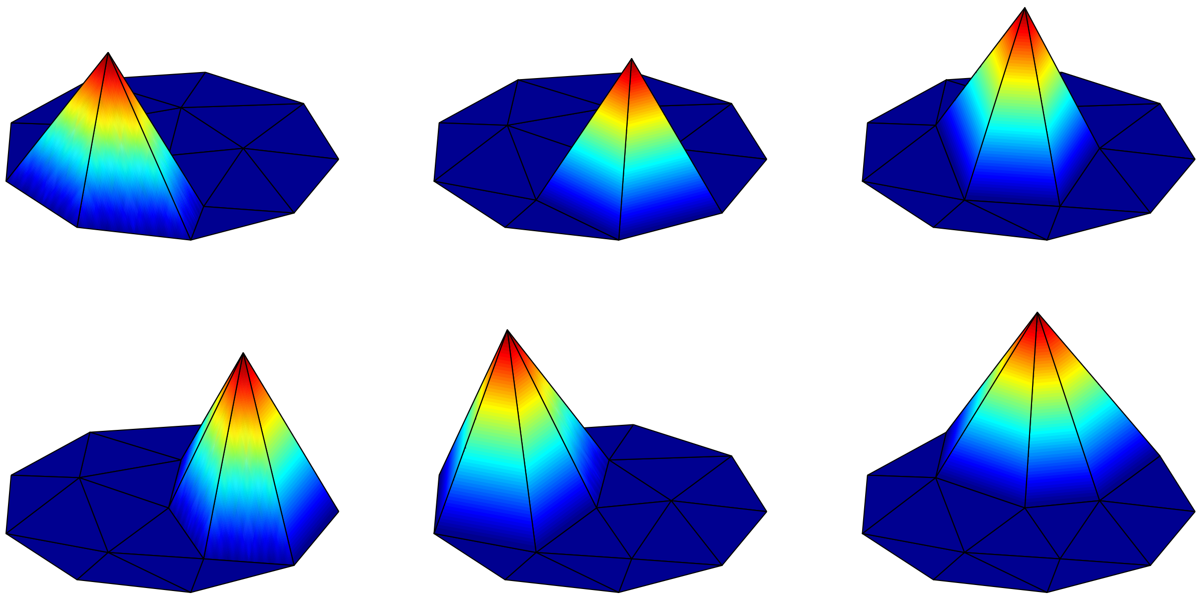
zerlege Ω in Teilgebiete:



Stückweise polynomiale Funktionen (z.B., linear – d.h. P_1 Elemente):



Basisfunktionen (**Nodalbasis**):



FEM in 2D: Gleichungssystem

Diskretes Gleichungssystem:

$$a(u_h, \phi_i) = F(\phi_i) \quad \forall \phi_i \in \{\text{Basis von } V_h\}$$

Setze $u_h = \sum_{j=1}^{N} v_j \phi_j$, dann $(a(u,v) = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v)$

$$a(u_h, \phi_i) = a(\sum_{i=j}^{N} v_j \phi_j,\, \phi_i) = \sum_{i=j}^{N} a(\phi_j, \phi_i) v_j \stackrel{!}{=} F(\phi_i)$$

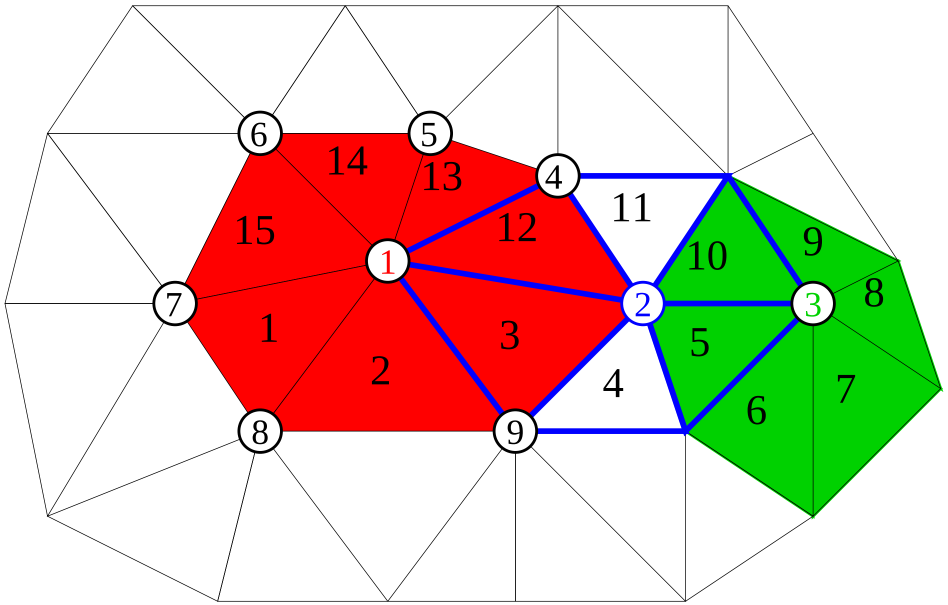
Mit $A = (A_{ij}) = (a(\phi_j, \phi_i))$, $b = (b_i) = (F(\phi_i))$ und $v = (v_i)$:

$$Av = b$$

Bemerkungen zur praktischen Realisierung

Hauptarbeit: berechne $A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) = -\int_\Omega \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i = \sum_{\tau \in T_h} \int_\tau \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i$

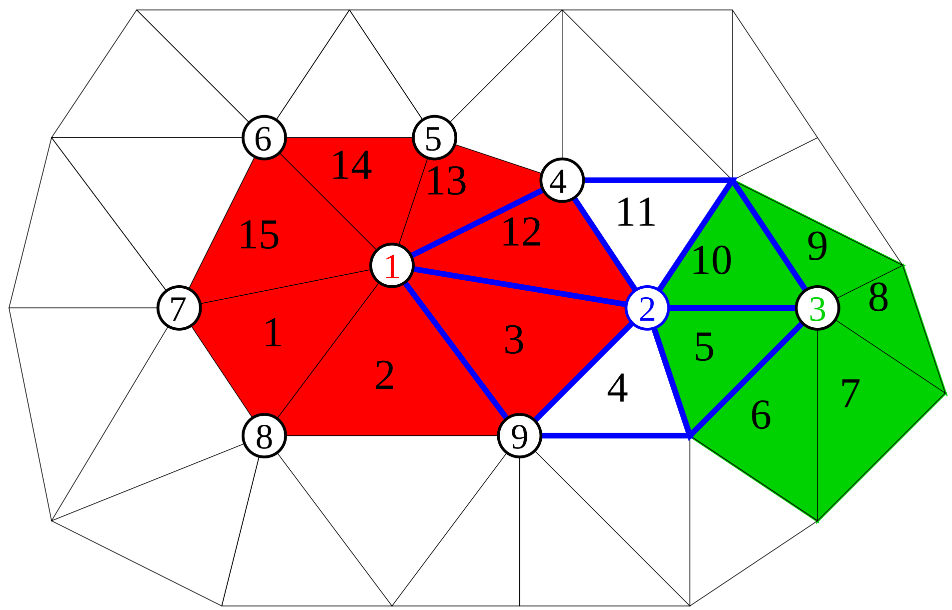
Beispiel:



$$a(\phi_1, \phi_1) = \sum_{m=1,2,3,12,13,14,15} \int_{\tau_m} \nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_1$$

$$a(\phi_1, \phi_2) = \sum_{m=3,12} \int_{\tau_m} \nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_2$$

$$a(\phi_1, \phi_3) = 0$$



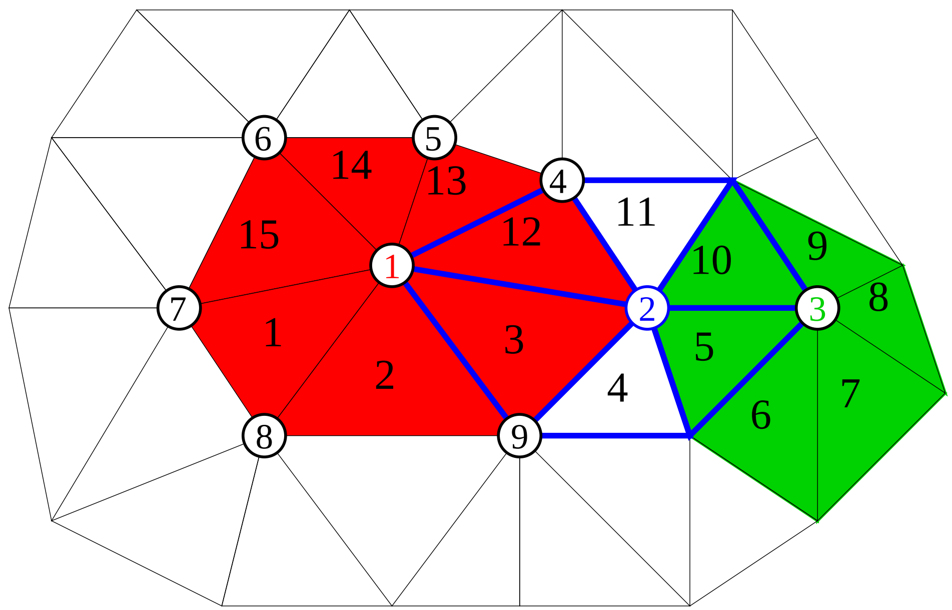
$$A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) = \sum_{\tau \in T_h} \int_\tau \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i$$

Oft die erste (intuitive) Vorgehensweise:

Schleife über alle Knoten. Für Knoten i

1. Finde die Menge J aller Nachbarknoten
2. Für alle $j \in J$ berechne $a(\phi_j, \phi_i)$ (dabei muss auch $\operatorname{supp}\phi_i \cap \operatorname{supp}\phi_j$ berechnet werden!)

Einträge der Matrix A werden dabei Zeile für Zeile bestimmt

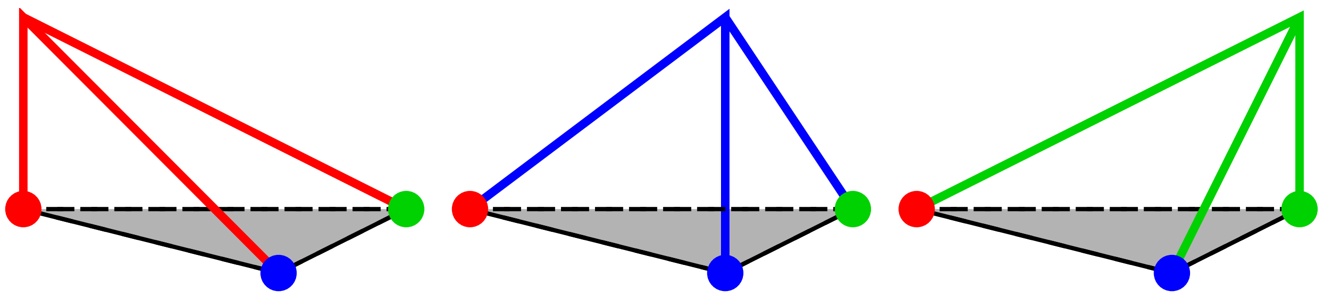


$$A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) = \sum_{\tau \in T_h} \int_\tau \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i$$

Praktischer (nach Meinung der Experten):

Eine Schleife über alle Elemente

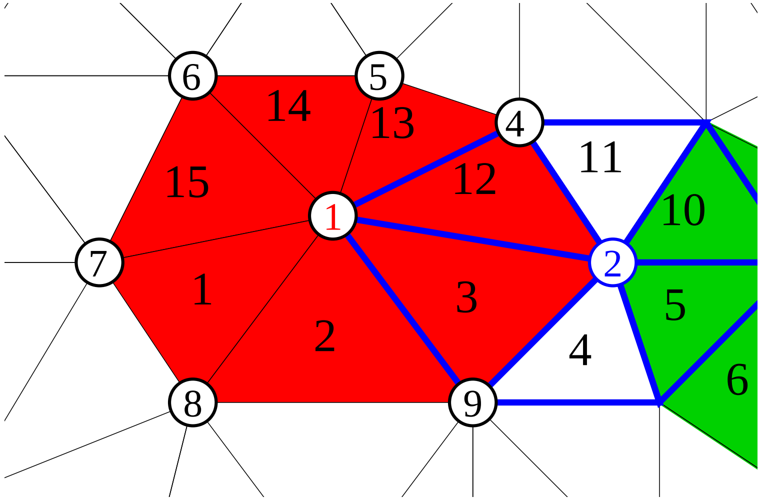
1. Führe auf jedem Dreieck die **lokalen Basisfunktionen** p_1, p_2, p_3 ein:



2. Berechne $a(p_m, p_n)$, $m, n = 1, 2, 3$

3. Update der entsprechenden Einträge in A

Beispiel:



τ_1: $p_1 \leftrightarrow x_8,\ p_2 \leftrightarrow x_1,\ p_3 \leftrightarrow x_7$

$$A_{88} += a(p_1,p_1),\ A_{81} += a(p_1,p_2) = A_{18},\ A_{87} += a(p_1,p_3) = A_{78},$$
$$A_{11} += a(p_2,p_2),\ A_{17} += a(p_2,p_3) = A_{71},\ A_{77} += a(p_3,p_3)$$

τ_2: $p_1 \leftrightarrow x_8,\ p_2 \leftrightarrow x_9,\ p_3 \leftrightarrow x_1$

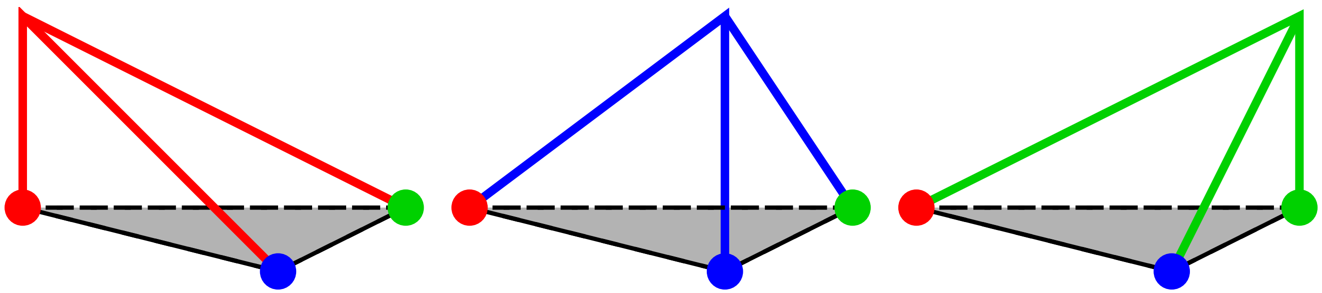
$$A_{88} += a(p_1,p_1),\ A_{89} += a(p_1,p_2) = A_{98},\ A_{81} += a(p_1,p_3) = A_{18},$$
$$A_{99} += a(p_2,p_2),\ A_{91} += a(p_2,p_3) = A_{19},\ A_{11} += a(p_3,p_3)$$

τ_3: $p_1 \leftrightarrow x_9,\ p_2 \leftrightarrow x_2,\ p_3 \leftrightarrow x_1$

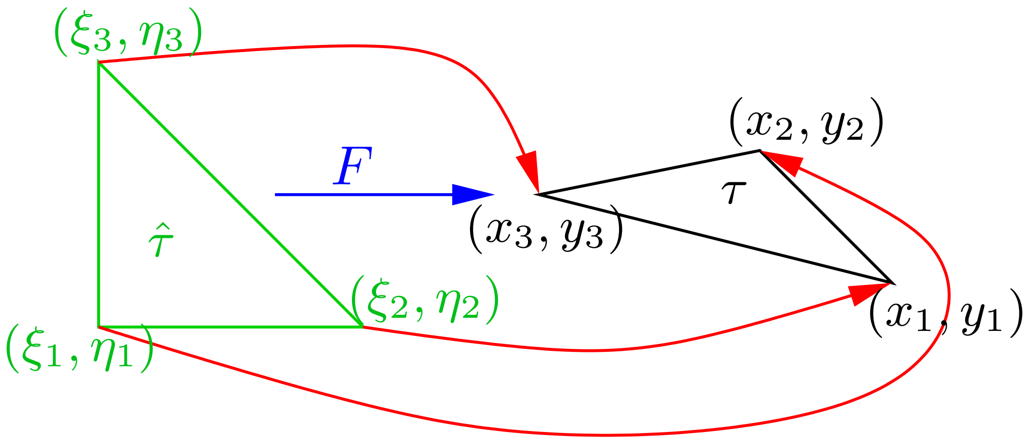
$$A_{99} += a(p_1,p_1),\ A_{92} += a(p_1,p_2) = A_{29},\ A_{91} += a(p_1,p_3) = A_{19},$$
$$A_{22} += a(p_2,p_2),\ A_{21} += a(p_2,p_3) = A_{12},\ A_{11} += a(p_3,p_3)$$

Integration der lokalen Basisfunktionen

Zu berechnen: $a(p_m, p_n)$, $m, n = 1, 2, 3$

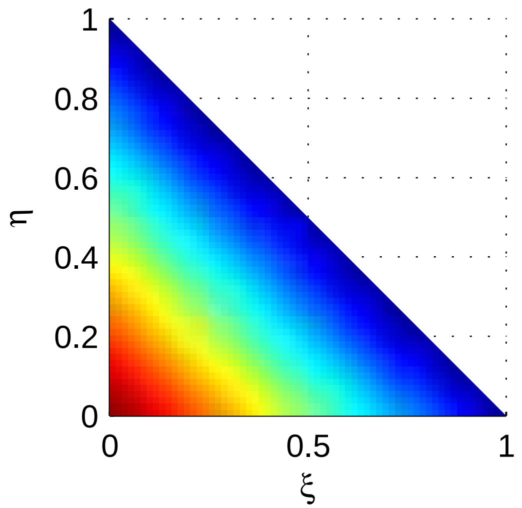


Idee: benutze einen Referenzdreieck $\hat{\tau}$

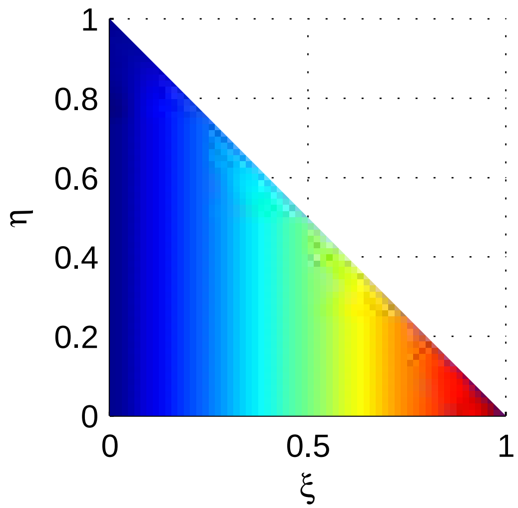


$$F(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

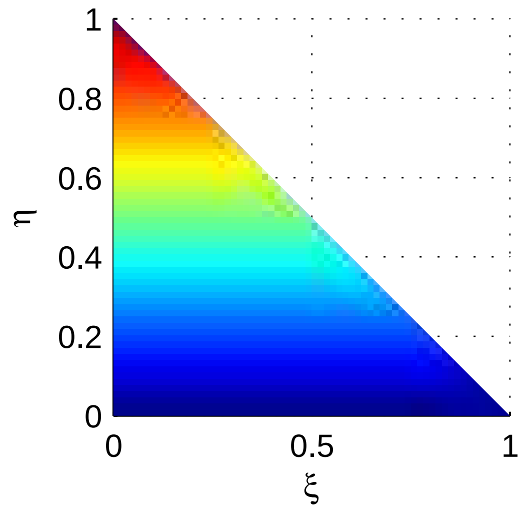
Lokale Basis auf $\hat{\tau}$:



$$\hat{p}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$



$$\hat{p}_2(\xi, \eta) = \xi$$



$$\hat{p}_2(\xi, \eta) = \eta$$

Einträge der Steifigkeitsmatrix:

$$\begin{aligned} \int_\tau p_i p_j &= \int_{\hat{\tau}} \hat{p}_i \hat{p}_j \det(DF) \\ \int_\tau \nabla p_i \cdot \nabla p_j &= \int_{\hat{\tau}} (DF^{-1}) \nabla \hat{p}_i \cdot (DF^{-1}) \nabla \hat{p}_j \det(DF) \end{aligned}$$

Die rechte Seite: schreibe

$$f \approx \sum_{j=1}^{N} f_j \phi_j$$

Dann

$$\int_\Omega f \phi_i \approx \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{N} f_j \phi_j \right) \phi_i = \sum_{j=1}^{N} f_j \underbrace{\int_\Omega \phi_j \phi_i}_{\text{berechne ähnlich wie } a(\phi_i, \phi_j)}$$

Zusammenfassung:

Um alle notwendige Integrale auszuwerten, benötigt man

- Die Transformationen F_τ auf das Referenzelement für alle $\tau \in T$
- die Basisfunktionen $\hat{p}$ und deren Ableitung auf $\hat{\tau}$
- eine Quadraturformel auf dem Referenzelement $\hat{\tau}$

Fragen für heute

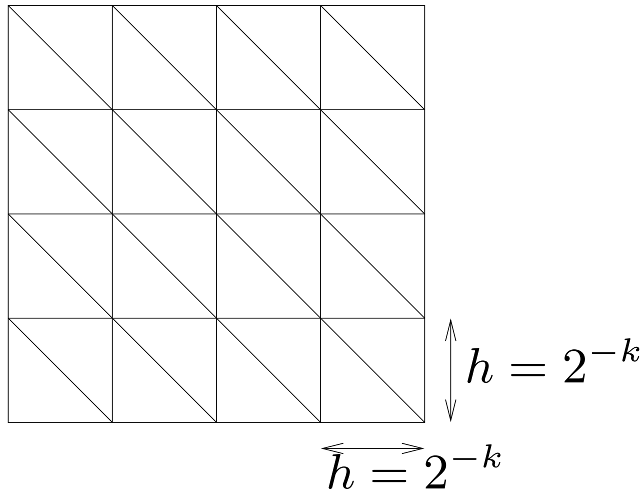
Betrachte die *Helmholtz-Gleichung*

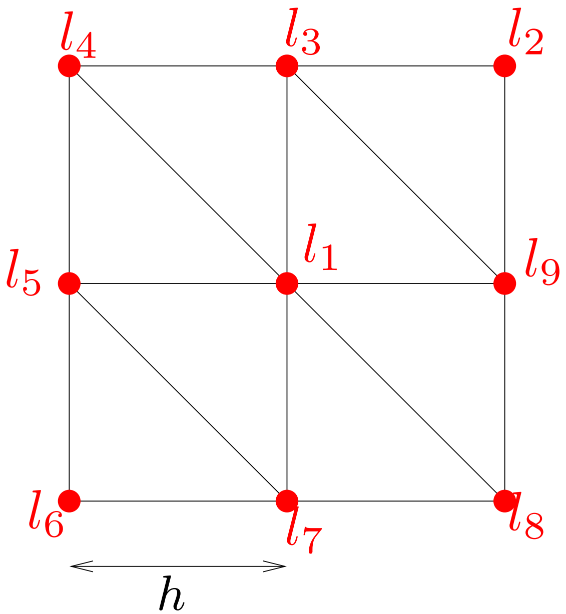
$$\begin{aligned} \Delta u + cu &= f \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1) \times (0,1)\ , \quad c \leq 0 \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Ziel:
eine Implementierung mit P_1-Elementen, einfache Triangulierung mit $k = 1, 2, \ldots$ (k: die Verfeinerungsstufe)

1. Schwache Formulierung?

2. Betrachten Sie die folgende Triangulierung:





Seien ϕ_1, ϕ_2, $\ldots \phi_N$ die Nodalbasis wie vorher. Berechnen Sie für die Konfiguration links mit Knotennumern l_i, $i = 1, \ldots, 9$

$$\int_\Omega \phi_{l_i}\phi_{l_j} \quad , \quad \int_\Omega \nabla\phi_{l_i} \cdot \nabla\phi_{l_j} \quad , \quad i, j = 1, \ldots, 9$$

3. Berechnen Sie die Einträge der Steifigkeitsmatrix A und des Ladevektors F!

4. Implementierung

5. Testen Sie Ihr Programm mit

$$u_{ex} = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$$

Wie verhält sich der Fehler, wenn die Verfeinerungsstufe k vergrößert wird?

Bemerkung:

$$\int_{\hat{\tau}} \hat{p}_1\hat{p}_1 = 1/12 \quad , \quad \int_{\hat{\tau}} \hat{p}_1\hat{p}_2 = 1/24 \quad , \quad \int_{\hat{\tau}} \hat{p}_1\hat{p}_3 = 1/24$$

$$\int_{\hat{\tau}} \hat{p}_2\hat{p}_2 = 1/12 \quad , \quad \int_{\hat{\tau}} \hat{p}_2\hat{p}_3 = 1/24 \quad , \quad \int_{\hat{\tau}} \hat{p}_3\hat{p}_3 = 1/12$$

$$\int_{\hat{\tau}} \nabla\hat{p}_1 \cdot \nabla\hat{p}_1 = 1 \quad , \quad \int_{\hat{\tau}} \nabla\hat{p}_1 \cdot \nabla\hat{p}_2 = -1/2 \quad , \quad \int_{\hat{\tau}} \nabla\hat{p}_1 \cdot \nabla\hat{p}_3 = -1/2$$

$$\int_{\hat{\tau}} \nabla\hat{p}_2 \cdot \nabla\hat{p}_2 = 1/2 \quad , \quad \int_{\hat{\tau}} \nabla\hat{p}_2 \cdot \nabla\hat{p}_3 = 0 \quad , \quad \int_{\hat{\tau}} \nabla\hat{p}_3 \cdot \nabla\hat{p}_3 = 1/2$$

Wenn Sie damit fertig sind, können Sie numerisch das folgende Problem angreifen:

$$\Delta u + cu = x^2 \quad \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1)$$

$$u = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x = 1 \\ |y - 0.5| - 0.5 & \text{falls } y = 0 \\ (y - 0.5)^2 - 0.25 & \text{falls } y = 1 \end{cases}$$

Schritte:

1. Implementierung allgemeiner Dirichlet Randbedingungen
   (a) Schwache Formulierung?
   (b) Konstruieren Sie eine Hilfsfunktion w, die die Randbedingungen erfüllt! (Numerisch – also – automatisch!!)
   (c) Wie ändert sich die rechte Seite im diskreten Gleichungssystem?
2. Testen des Programms
3. Konkretes Problem