FEM Praktikum - Elemente höherer Ordnung

Tim Seger, Johannes Meller, Felix Kleber

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

1 Approximationseigenschaften (Cea's Lemma)

1.1 Einleitung

Ausgehend von der schwachen Formulierung der Randwertaufgabe (RWA) suchen wir eine Funktion $u \in H$ für

$$a(u, v) = F(v), \ \forall v \in H, \tag{1}$$

mit einem (unendlich) dimensionalen Hilbertraum H, einer stetigen, koerzitiven Bilinearform a und einem Funkional $F \in H'$.

Definition 1 *Sei H ein reeller Hilbertraum und $a : H \times H \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. a heißt*

1. *stetig auf H, wenn es ein $C > 0$ gibt, so dass für alle $u, v \in H$ gilt:*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| ;$$

2. *koerzitiv (oder elliptisch) auf H, wenn es ein $\lambda > 0$ gibt, so dass für alle $u \in H$ gilt:*

$$a(u, u) \geq \lambda \|u\|^2 .$$

Beispiel 1 *Betrachte folgende DGL:*

$$-u'' + u' + u = f, \ x \in (0, 1), \ u'(0) = u'(1) = 0.$$

Die schwache Formulierung für $v \in H_0^1(0, 1)$ lautet:

$$a(u, v) = \int_0^1 (-u'' + u' + u)v \ dx = -u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v' \ dx + \int_0^1 (u' + u)v \ dx$$

$$= \int_0^1 (u'v' + u'v + uv) \ dx,$$

Für die rechte Seite gilt hier:

$$F(v) = \int_0^1 fv \ dx.$$

Die Bilinearform a ist nicht-symmetrisch, stetig und koerzitiv:

– *Stetigkeit:*

$$|a(u,v)| \leq |\left\langle u,v \right\rangle_{H^1(0,1)}| + |\int_0^1 u'v \; dx|$$

$$\leq \|u\|_{H^1(0,1)} \|v\|_{H^1(0,1)} + \|u'\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)}$$

$$\leq 2 \|u\|_{H^1(0,1)} \|v\|_{H^1(0,1)} .$$

– *Koerzitivität:*

$$a(v,v) = \int_0^1 (v'^2 + v'v + v^2) \; dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (v' + v)^2 \; dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (v'^2 + v^2) \; dx$$

$$\geq \frac{1}{2} \|v\|^2_{H^1(0,1)} .$$

Diskretisierung der RWA: $H_h \subset H$, $dim(H_h) = \frac{1}{h} < \infty$, $H_h = span(\Phi_1, ..., \Phi_N)$. Wir suchen jetzt also ein $u_h \in H_h$ für obige Gleichung:

$$a(u_h, v) = F(v), \; \forall v \in H_h. \tag{2}$$

Dies führt bekannterweise auf ein lineares Gleichungssystem der Form $Av = b$, mit $A = (a(\Phi_i, \Phi_j))_{ij}$ und $b = F(\Phi_j)$.

Bemerkung 1 *Ist die Bilinearform a koerzitiv, so ist die Matrix A strikt positiv definit. Denn für alle $\xi \in \mathbb{R}^N$ und $z = \sum_i \xi_i \Phi_i$ gilt:*

$$\xi^T A \xi = \sum_{i,j=1}^{N} \xi_i a(\Phi_i, \Phi_j) \xi_j = a(z,z) \geq \lambda \|z\|^2 .$$

Insbesondere ist das LGS $Av = b$ eindeutig lösbar, denn falls für $x \neq 0$ $Ax = 0$ gilt, ist das ein Widerspruch zur Koerzitivität. Also ist A invertierbar und wir haben eine eindeutige Lösung.

1.2 Das Lemma von Cea

Sei nun $u \in H$ stets die Lösung des Ausgangsproblems (1) und $u_h \in H_h$ die der diskreten Formulierung (2). Da wir jetzt wissen, dass zu Problem (2) eine Lösung existiert, stellst sich nun die Frage nach dem Fehler, der sich aus der diskreten Lösung u_h des Problems ergibt.

Das folgende Resultat sagt erst einmal etwas über die Stabilität unserer approximierenden Lösung u_h aus.

Lemma 1 *Sei a koerzitiv. Dann existiert eine Konstante $\lambda > 0$, so dass folgende Abschätzung gilt:*

$$\|u_h\| \leq \lambda^{-1} \|F\|_{H'} .$$

Beweis. $\lambda \|u_h\|^2 \leq a(u_h, u_h) = F(u_h) \leq \|F\|_{H'} \|u_h\| .$ □

Wie gut approximiert u_h die Lösung u? Eine Antwort gibt das Lemma von Cea:

Lemma 2 *Sei die Bilinearform $a : H \times H \to \mathbb{R}$ stetig und koerzitiv. Dann gilt für die Lösungen $u \in H$ und $u_h \in H_h$ des kontinuierlichen bzw. diskreten Problems die Beziehung*

$$\|u - u_h\| \leq \frac{C}{\lambda} \inf_{v \in H_h} \|u - v\| , \tag{3}$$

wobei C und λ die Konstanten aus Definition 1 sind.

Beweis. Subtraktion von (1) und (2) ergibt für alle $v \in H_h$:

$$a(u - u_h, v) = 0. \tag{4}$$

Insbesondere gilt

$$a(u - u_h, u_h) = 0.$$

Also folgt mit der Koerzitivität und der Stetigkeit von a:

$$\lambda \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - u_h)$$

$$= a(u - u_h, u) - a(u - u_h, u_h) - a(u - u_h, v)$$

$$= a(u - u_h, u - v)$$

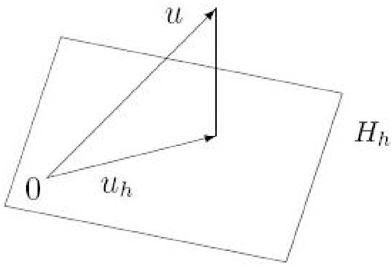
$$\leq C \|u - u_h\| \|u - v\| ,$$

und daher gilt für alle $v \in H_h$

$$\|u - u_h\| \leq \frac{C}{\lambda} \|u - v\|$$

und damit die Behauptung. □

Bemerkung 2 *Falls a zustzlich symmetrisch ist (das heißt $a(u, v) = a(v, u)$), dann definiert $a(.,.)$ ein Skalarprodukt auf H und H_h. In diesem Fall hat das Lemma von Cea ein geometrische Interpretation. Die Beziehung (4) bedeutet, daß $u - u_h$ orthogonal zu H_h ist, das heißt, u_h ist dasjenige Element in H_h, das* *u am nähesten kommt (siehe Abbildung). Dies wird gerade durch (3) ausgerückt.*



Die Approximation u_h kommt u in H_h am nähesten.

Die Güte der Approximation hängt also nur davon ab, wie genau man u mit Funktionen aus H_h approximieren kann. Dies zeigt die Wichtigkeit der Wahl von H_h. Für eine Folge von asymptotisch dicht liegenden Teilräumen H_h, das heißt

$$\lim_{h \to 0} dist(u, H_h) = 0, \ \forall u \in H,$$

ergibt sich sofort die Konvergenz des Verfahrens:

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\| = 0.$$

1.3 Fehlerabschätzungen in $H^1(\Omega)$

Wir wollen nun den Diskretisierungsfehler $\|u - u_h\|$ näher untersuchen. Nach dem Lemma von Cea genügt es den Approximationsfehler

$$\inf_{v \in H_h} \|u - v\|$$

abzuschätzen.

Zunächst betrachten wir hierfür den Fall linearer Basisfunktionen (P_1-Elemente) in einer Dimension (das heißt $\Omega = (a, b)$) und nehmen an, dass die kontinuierliche Lösung die Regularität

$$u \in H^2(\Omega)$$

besitzt. Dies ist notwendig, um Aussagen über die Konvergenzordnung zu machen. Weiter sei $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ die gegebene Triangulierung von Ω, $h_i = x_i - x_{i-1}$ und $h = \max_i h_i$.

Definition 2 *Für ein beliebiges $v \in H^2(\Omega)$ definieren wir den Interpolationsoperator*

$$I_h : H^2(\Omega) \to H_h, \ v \mapsto I_h v := \sum_{i=1}^{N} B_i(v) \Phi_i,$$

wobei die B_i die Freiheitsgrade sind und $(\Phi_1, ..., \Phi_N)$ eine Basis von H_h ist. Als Freiheitsgrade wählen wir im allgemeinen

$$B_i(v) = v(x_i).$$

Es folgt nun unmittelbar die Abschätzung

$$\inf_{v \in H_h} \|u - v\|_{H^1} \leq \|u - I_h u\|_{H^1}.$$

Deswegen reicht es also den Interpolationsfehler $\|u - I_h u\|_{H^1}$ abzuschätzen, um Aussagen über die Konvergenz treffen zu können.

Bemerkung 3 *Im folgenden werden wir nur Resultate präsentieren und diese nicht beweisen, um nicht den Rahmen dieses Kurz-Skripts zu sprengen. Angegeben werden nur die einzelnen Schritte, die dann auf das Ergebnis der Fehlerabschätzung führen:*

1. *Lokalisierung auf die Teilgebiete*
2. *Transformation der Teilgebiete auf das Einheitsintervall*
3. *Betsimmung des lokalen Interpolationsfehlers*
4. *Rücktransformation*

Satz 1 *Sei $u \in H^2(\Omega)$, $\Omega = (a, b)$. Dann gilt für den Interpolationsfehler*

$$\|u - I_h u\|_{H^1} \leq Ch \|u\|_{H^2}.$$

Satz 2 *Sei $u \in H^2(\Omega)$ die Lösung des kontinuierlichen Problems und u_h die diskrete Lösung. Dann gilt*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch \|u\|_{H^2}.$$

Beweis. Lemma von Cea. □

Für den höherdimensionalen Fall ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) betrachten wir jetzt Basiselemente, welche polynomiale Funktionen vom Grad m (P_m-Elemente) sind.

Satz 3 *Sei u die Lösung des kontinuierlichen Problems und u_h die diskrete Lösung. Dann gilt für $u \in H^{m+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch^m |u|_{H^{m+1}}.$$

Bemerkung 4 *Zwei Erläuterungen zu Satz 3:*

- *Wir setzen hier voraus, dass für $u \in H^{m+1}$ der Interpolationsoperator auf P_m-Elemente abbildet.*
- *Obige Norm ist folgendermaßen definiert:*

$$|u|_{H^m} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2 \right)^{1/2}.$$

1.4 Fehlerabschätzungen in $L^2(\Omega)$

Die Frage ist nun, ob es nicht noch eine Abschätzung höherer Konvergenzordnung im Vergleich zur H^1-Norm gibt. Betrachten wir dazu die L^2-Norm. Hier gilt für die Differenz der Lösung u und deren linearer Interpolierenden

$$\|u - I_h u\|_{L^2} \leq Ch^2 |u|_{H^2},$$

sofern $u \in H^2(\Omega)$ gilt. Für die Fehlerabschätzung in L^2 gilt:

Satz 4 *Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung von $a(u, v) = \langle g, v\rangle_{L^2}$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ mit $g \in L^2(\Omega)$. Falls $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{H^2} \leq C\,\|g\|_{L^2}$ gilt, folgt*

$$\|u - u_h\|_{L^2} = O(h^2).$$

Die in Satz 4 gegebenen Voraussetzungen bedeuten, dass hier das adjungierte Problem ins Spiel gebracht wurde, da hier das Lemma von Cea nicht anwendbar ist (die Bilinearform a ist bezüglich der L^2-Norm nicht beschränkt und für allgemeine L^2-Funktionen nicht einmal wohldefiniert).

1.5 Fehlerabschätzungen in $L^\infty(\Omega)$

In der L^∞-Norm haben wir folgende Fehlerabschätzung für unser Problem:

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq Ch|u|_{H^2}.$$

Bemerkung 5 *Die vorherigen Abschätzungen sind Beispiele von a-priori Abschätzungen, das heißt es werden Eigenschaften der kontinuierlichen Lösung u a-priori vorausgesetzt, und damit sind auch die Konstanten in den Abschätzungen nicht explizit berechenbar (zum Beispiel kennt man $|u|_{H^{m+1}}$ nicht, da man ja die Lösung u nicht kennt). Alternativ lassen sich sogenannte a-posteriori Abschätzungen herleiten, bei denen die Schranken nur von der diskreten Lösung u_h (die man wirklich berechnet) abhängen.*