FEMs höherer Ordnung

1. Approximationseigenschaften

Universität Konstanz
Seminar Praktikum FEM
Dozentin: Vita Rutka
Referenten: Tim Seger, Felix Kleber, Johannes Meller

Wiederholung:

- Ausgangspunkt:

$$a(u,v) = F(v), \ \forall v \in H$$

- Def.: Koerzivität

$$a(u,u) \geq \lambda \|u\|^2$$

- Def.: Stetigkeit auf H:

$$|a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\|$$

- Diskretisierung:
  - $H_h \subset H$
  - $dim(H_h) = \frac{1}{h} < \infty$
  - $H_h = span(\Phi_1, ..., \Phi_N)$

  $\Rightarrow Suche\ u_h \in H_h\ für\ a(u_h, v) = F(v),\ \forall v \in H_h$

  $\Rightarrow ergibt\ Av = b\ mit\ A = (a(\Phi_i, \Phi_j))_{ij}\ und\ b = F(\Phi_j)$

- Céa's Lemma:

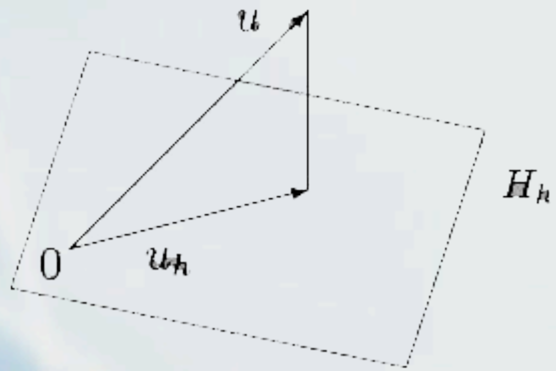
  <u>- Vor.:</u>

  - $sei\ a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}\ stetig\ und\ koerziv$
  - $seien\ u \in H\ und\ u_h \in H_h\ diskrete\ bzw.\ kontinuierliche\ Lösung$

  <u>- Beh.:</u>

  - $\|u - u_h\| \leq \frac{C}{\lambda} \inf_{v \in H_h} \|u - v\|$
  - $C\ und\ \lambda\ wie\ in\ Definition\ 1$

- Bemerkung:
  - $-$ *sei a symmetrisch*
  - $\Rightarrow a(.,.)$ *Skalarprodukt auf* H *und* H_h
  - $\Rightarrow$ *geometrische Interpretation :*



Die Approximation u_h *kommt* u *in* H_h *am nächsten*

- Fehlerabschätzung in $H^1(\Omega)$

  $- \ \textit{nähere Untersuchung von } \|u - u_h\|$

  $\Rightarrow \textit{Betrachtung von } \inf_{v \in H_h} \|u - v\| \ \textit{(nach Céa)}$

  $- \ 1.\ Fall: \ \textit{lineare Basisfunktionen in einer Dimension}$
  $\textit{mit Regularität } u \in H^2(\Omega)$

  - $sei\ a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b\ Triangulierung\ von\ \Omega$
  - $sei\ h_i = x_i - x_{i-1}$
  - $sei\ h = max\ h_i$

- Definition:

- $\textit{für bel. } v \in H^2(\Omega) \textit{ sei}$

$$I_h : H^2(\Omega) \to H_h,\ v \mapsto I_h v := \sum_{i=1}^{N} B_i(v)\Phi_i$$

- $(\Phi_1, ..., \Phi_N)$ *Basis von* H_h

- B_i *seien Freiheitsgrade mit* $B_i(v) = v(x_i)$

$$\Rightarrow \inf_{v \in H_h} \|u - v\|_{H^1} \le \|u - I_h u\|_{H^1}$$

- Satz:

- $sei\ u \in H^2(\Omega)\ und\ \Omega = (a,b)$

$\Rightarrow \|u - I_h u\|_{H^1} \leq Ch\,\|u\|_{H^2}$

- Satz:

- $sei\ u \in H^2(\Omega)\ kontinuierliche\ Lösung$
- $sei\ u_h\ diskrete\ Lösung$

$\Rightarrow \|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch\,\|u\|_{H^2}$

- 2. Fall: polynomiale Basisfkt. vom Grad m:

Satz:

- $sei\ u_h\ diskrete\ Lösung$
- $sei\ u\ kontinuierliche\ Lösung$
- $sei\ u \in H^{m+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch^m |u|_{H^{m+1}}$$

- Fehlerabschätzung in $L^2(\Omega)$

  - $f\ddot{u}r\ die\ L^2 - Norm\ gilt:$

    $$\|u - I_h u\|_{L^2} \leq Ch^2 |u|_{H^2}$$

  - $Satz:$

    - $sei\ a(u,v) = \langle g, v\rangle_{L^2}\ \ \forall v \in H_0^1(\Omega)\ mit\ g \in L^2(\Omega)$
    - $sei\ u \in H_0^1(\Omega)\ schwache\ L\ddot{o}sung$
    - $sei\ u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\ mit\ \|u\|_{H^2} \leq C\,\|g\|_{L^2}$

    $\Rightarrow\ \|u - u_h\|_{L^2} = O(h^2)$

- Fehlerabschätzung in $L^\infty(\Omega)$

$$- \textit{für die } L^\infty - Norm\ gilt:$$

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq Ch|u|_{H^2}.$$