Weitere Anwendungen:

Instabile Elemente und Brezzi-Bedingung

DIE STOKES-GLEICHUNG

- spezielle Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible, zähe Flüssigkeiten

$$\begin{aligned} \Delta u + \operatorname{grad} p &= -f \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

- gesucht:
  - Geschwindigkeitsfeld $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$
  - Druck $p\colon \Omega \to \mathbb{R}$
- Normierung: $\int_\Omega \mathrm{p}\, dx = 0$

SCHWACHE FORMULIERUNG

$$\int_\Omega \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, dx + \int_\Omega \operatorname{div} v \cdot p \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx$$

$$\int_\Omega \operatorname{div} u \cdot q \, dx = 0$$

mit $v \in H_0^1(\Omega)^n$ und $q \in L_{2,0} = \{q \in L_2(\Omega) : \int_\Omega q \, dx = 0\}$
sowie $u_0 = 0$

$$a(u,v) + b(v,p) = \langle f, v \rangle$$
$$b(u,q) = 0$$

Auswahl der Elemente

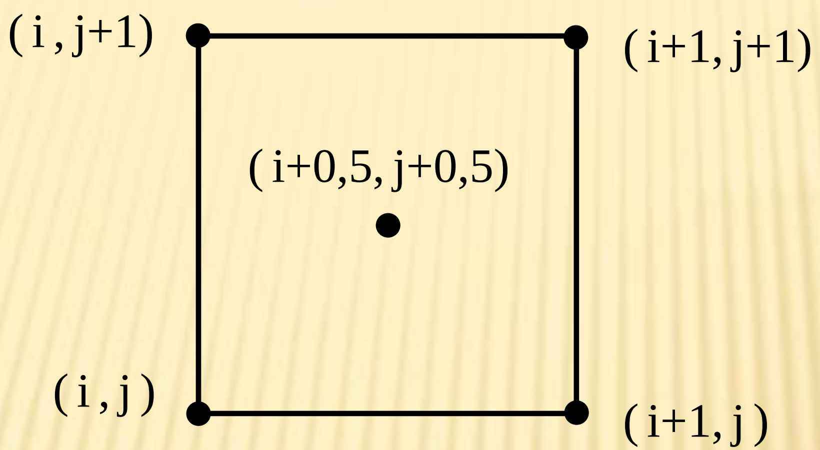
- Grad der Ableitung von u ist eins höher als der Grad der Ableitung von p

- **Faustregel:**
  Grad der Polynome zur Approximation der Geschwindigkeit soll eins höher sein als der Grad der Polynome zur Approximation des Druckes.

- Wähle das Q_1-P_0 Element
  - Rechteckelement mit bilinearen Funktionen für u
  - Stückweise konstante Funktionen für p

Q_1-P_0 Element

- Nummerierung der Knoten:



- Betrachte nun $\int_{T_{ij}} \operatorname{div} v \cdot q \, dx$ auf diesem Rechteck:

$$\int_{T_{ij}} \operatorname{div} v \cdot q \, dx = h^2 q_{i+0,5,j+0,5} \operatorname{div} v_{i+0,5,j+0,5}$$

Q_1-P_0 ELEMENT

$$\int_{\mathrm{T_{ij}}} \mathrm{div}\, v \cdot q\, dx = h^2 q_{i+0,5,j+0,5} \frac{1}{2h} (v^1_{i+1,j+1} + v^1_{i+1,j} - v^1_{i,j+1} - v^1_{i,j}$$
$$+ v^2_{i+1,j+1} + v^2_{i+1,j} - v^2_{i,j+1} - v^2_{i,j})$$

mit $v = \binom{v^1}{v^2}$

- Summation über alle $\mathrm{T_{ij}}$:

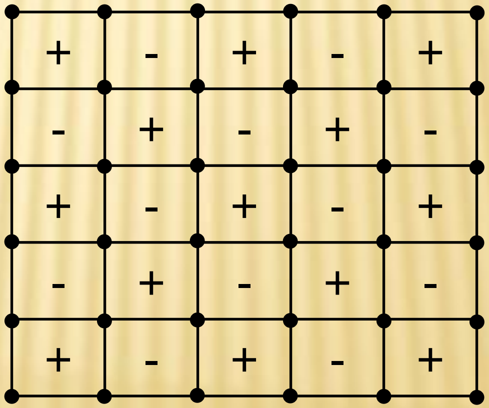
$$\int_{\Omega} \mathrm{div}\, v \cdot q\, dx = h^2 \sum_{i,j} (v^1_{i,j} (\nabla_1 q)_{i,j} + v^2_{i,j} (\nabla_2 q)_{i,j})$$

mit $(\nabla_1 q)_{i,j} = \frac{1}{2h} (q_{i+0,5,j+0,5} + q_{i+0,5,j-0,5} - q_{i-0,5,j+0,5} - q_{i-0,5,j-0,5})$

$(\nabla_2 q)_{i,j} = \frac{1}{2h} (q_{i+0,5,j+0,5} - q_{i+0,5,j-0,5} + q_{i-0,5,j+0,5} - q_{i-0,5,j-0,5})$

Q_1-P_0 Element

- Falls $q_{i+0,5,j+0,5} = q_{i-0,5,j-0,5}$ und $q_{i+0,5,j-0,5} = q_{i-0,5,j+0,5}$ gilt ist $\int_\Omega \operatorname{div} v \cdot q \, dx = 0$
- bzw. $q_{i+0,5,j+0,5} = \begin{cases} a & \text{für } i+j \text{ ungerade} \\ b & \text{für } i+j \text{ gerade} \end{cases}$
- Schachbrettinstabilität:



SATTELPUNKTPROBLEME

- sind von der Form:

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= (f,v) \\ b(u,q) &= (g,q) \end{aligned}$$

- wobei $a: X \times X \to \mathbb{R}$, $b: X \times M \to \mathbb{R}$ mit Hilberträumen X,M und $a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch und $a(v,v) \geq 0$ für alle $v \in X$
- Es wird eine lineare Abbildung definiert:

$$\begin{aligned} L: X \times M &\to X' \times M' \\ (u,p) &\to (f,g) \end{aligned}$$

- Ziel: L soll Isometrie sein

SATTELPUNKTPROBLEME

- **Satz:** (ohne Beweis)

  L ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die beiden folgenden Bedingungen gelten:

  (1) Die Bilienarform a ist V-elliptisch

  (2) Die Bilinearform b erfüllt die inf-sup-Bedingung:

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v,q)}{||v|| \, ||q||} \geq ß$$

BREZZI-BEDINGUNG

- Fenite-Elemente: gesucht wird $(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$ mit

$$a(u_h, v) + b(v, p_h) = \langle f, v \rangle \qquad \text{für } v \in X_h$$
$$b(u_h, q) = \langle g, q \rangle \qquad \text{für } q \in M_h$$

- **Definition:**

Eine Familie von Finite-Elemente-Räumen X_h , M_h erfüllen die Brezzi-Bedinung, wenn es $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ gibt mit:

(1) Die Bilinearform a ist V_h elliptisch mit Elliptizitätskonstanten α

(2) Es ist:

$$\sup_{v \in X_h} \frac{b(v, q_h)}{\|v\|} \geq \beta \|q_h\| \qquad \text{für } q_h \in M_h$$

STABILE ELEMENTE

- Taylor-Hood-Element:
  - u ist bei ● gegeben
  - p ist bei × gegeben