Finite Elemente Methode für elliptische Differentialgleichungen

Michael Pokojovy

18. Oktober 2007

1 Das Ritzsche Verfahren

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes offenes Gebiet mit abschnittsweise glattem Rand S. Betrachte die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g \text{ in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= \gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Die äußere Normale $n = n(x) \in \mathbb{R}^n$ existiere für $x \in \partial\Omega$ mit Ausnahme endlich vieler Punkte.

$\overline{\Omega}$ genügt also den Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes, d.h. für $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_\Omega \nabla' F(x)\,\mathrm{d}\Omega = \int_S F \cdot n\,\mathrm{d}S.$$

Für $\psi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$ sei

$$D_\psi = \{u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \,:\, u|_{\partial\Omega} = \psi\}.$$

Das Ritzsche Verfahren basiert auf einer Umformulierung der Randwertaufgabe (1) in ein Variationsproblem.

Satz 1 *Für eine Funktion $\overline{u} \in C^2(\Omega) \cap D_\gamma$ sind paarweise äquivalent*

i) $\overline{u}$ löst das Problem (1)

ii) $\overline{u}$ ist stationärer Punkt des Funktionals

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - gu\,dx,$$

wobei $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap D_\gamma$ ist *iii)* $\overline{u} = u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap D_\gamma$ *erfüllt*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - gv \, dx = 0$$

für alle $v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap D_0$.

Bemerkung 2 *$\overline{u}$ heißt stationärer Punkt eines Funktionals $I : C^1(\overline{\Omega}) \cap D_\gamma \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn*

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(\overline{u} + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = 0$$

für alle $v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap D_0$.

Bemerkung 3 *Die Aussage ii) ist äquivalent damit, dass das Funktional I sein Minimum bei $\overline{u}$ annimmt. Man bezeichnet deshalb ii) als Variationsproblem und iii) als Variationsgleichung oder schwache Formulierung der Randwertaufgabe.*

Beweis: Zum Beweis benötigen wir die erste Greensche Formel

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}S = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u \, \mathrm{d}\Omega,$$

die sich aus dem Gauß'schen Satz ableiten lässt.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Für $v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap D_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(\overline{u} + \varepsilon v) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\int_\Omega \frac{1}{2} (\nabla \overline{u} + \varepsilon \nabla v) \cdot (\nabla \overline{u} + \varepsilon \nabla v) - g(\overline{u} + \varepsilon v) \, \mathrm{d}\Omega \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\int_\Omega \frac{1}{2} \nabla \overline{u} \cdot \nabla \overline{u} + \varepsilon \nabla v \nabla \overline{u} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \nabla v \cdot \nabla v - g \overline{u} - \varepsilon g v \, \mathrm{d}\Omega \right) \\
&= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \overline{u} + \varepsilon \nabla v \cdot \nabla v - g \cdot v \, \mathrm{d}\Omega.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(\overline{u} + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \overline{u} - gv \, \mathrm{d}\Omega.$$

Also ist $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(\overline{u} + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = 0$ genau dann, wenn *iii)* gilt.

i) $\Rightarrow$ *iii)* Multipliziere (1) mit einem $v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap D_0$ und integriere die dadurch erhaltene Gleichung über Ω. Unter Benutzung der ersten Greenschen Formel ergibt sich die Gültigkeit von

$$\int_\Omega gv \, \mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \Delta \overline{u} v \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \overline{u} \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial \overline{u}}{\partial n} \, \mathrm{d}S = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \overline{u} \, \mathrm{d}\Omega$$

für alle $v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap D_0$.

$iii) \Rightarrow i)$ Es gilt umgekehrt

$$\int_\Omega gv - \nabla v \cdot \nabla \overline{u} \, \mathrm{d}\Omega = 0$$

genau dann, wenn

$$\int_\Omega (-\Delta \overline{u} - g) v \, \mathrm{d}\Omega = 0$$

für alle $v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap D_0$ erfüllt ist.

Mit dem Variationslemma folgern wir $-\Delta u - g = 0$, d.h. $i)$ gilt, da $u \in C^2(\Omega) \cap D_0$.

$\square$

Wir können nun das Ritzsche Verfahren zur Lösung von (1) formulieren. Wähle ein $u_0 \in C^1(\overline{\Omega}) \cap D_\gamma$ und Ansatzfunktionen $u_i \in C^1(\Omega) \cap D_0$, $i = 1, \ldots, m$.

Mache das Funktional $I : C^1(\overline{\Omega}) \cap D_\gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ stationär bzgl. $u \in u_0 + V$, $V = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, d.h. finde ein $\overline{u} \in u_0 + V$ mit

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} I(\overline{u} + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = 0$$

für alle $v \in V$.

Dies ist äquivalent mit folgender Aufgabe: Finde ein $\tilde{u} \in u_0 + V$ mit

$$\int_\Omega \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v - gv \, \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2}$$

für alle $v \in V$.

Die Gleichung (2) nennt man Galerkinsche Gleichung zur Randwertaufgabe (1).

Suche $\tilde{u}$ in der Form

$$\tilde{u} = u_0 + \sum_{j=1}^m c_j u_j, \quad c_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Es genügt, die Bedingung (2) auf einer Basis von V zu fordern.

Wähle die Basis $\{u_1, \ldots, u_m\}$. Erhalte

$$\int_\Omega \nabla \left(u_0 + \sum_{j=1}^m c_j u_j \right) \cdot \nabla u_i - g u_i \, \mathrm{d}\Omega = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\int_\Omega \left(\nabla u_0 + \sum_{j=1}^m c_j \nabla u_j \right) \cdot \nabla u_i - g u_i \, \mathrm{d}\Omega = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^m c_j \nabla u_j \cdot \nabla u_j \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega g u_i - \nabla u_0 \cdot \nabla u_i \, \mathrm{d}\Omega, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Setzt man $A_{ij} = \int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla u_j \, \mathrm{d}\Omega$ und $r_i = \int_\Omega g u_0 - \nabla u_0 \cdot \nabla u_i \, \mathrm{d}\Omega$, so ist letzteres mit folgender Gleichung äquivalent:

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} c_j = r_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

bzw.

$$Ac = r$$

mit $A = (A_{ij})_{1 \le i,j \le m} \in \mathbb{R}^{m,m}$ und $r = (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{R}^m$ in der Matrixform.

Beim klassischen Ritzschen Verfahren wählt man glatte Ansatzfunktionen $u_i \in C^1(\overline{\Omega}) \cap D_0$, $i = 1, \ldots, m$, die im allgemeinen auf dem ganzen Gebiet nicht verschwinden. A ist dann eine vollbesetzte Matrix.

Bemerkung 4 *Das Ritzsche Verfahren lässt sich auch auf andere Randbedingungen verallgemeinern.*

2 Finite Elemente Methoden

Finite Elemente Methoden unterscheiden sich in zwei Punkten von Ritzschen Verfahren. Die wesentlichen Abweichungen sind:

1. Es wird geringere Glattheit der Ansatzfunktionen vorausgesetzt. Dabei verwendet man schwächere Glattheitsbegriffe, wie etwa schwache Differenzierbarkeit und sogenannte Sobolevräume.

   Man ersetzt das Gebiet Ω durch eine geeignete Approximation, z.B. durch eine Triangulierung Ω_{T_n} (falls $\Omega \subset \mathbb{R}^2$), indem man

   $$\Omega_{T_n} = \bigcup_{e \in E_n} e$$

   setzt, wobei E_n eine Menge von Dreiecken ist. Je zwei Dreiecke $e, e' \in E_n$ haben entweder eine Seite, oder einen Punkt oder nichts gemeinsam.

   Ferner definiert man

   $$V_{T_n} = \{u \in C(\Omega_{T_n}) \,|\, u \text{ ist linear in } x \text{ auf jedem Dreieck } e \in E_n \\ \text{und } u = 0 \text{ auf „}\Omega_{T_n} \cap \partial\Omega\text{“}\}.$$

   Bemerkung 5 *Beachte, dass die Funktionen $u \in V_{T_n}$ nicht zu dem Raum $C^1(\overline{\Omega})$ gehören! Formal gilt also die Äquivalenz im Satz 1 nicht mehr. Eine andere Äquivalenzaussage lässt sich aber zeigen, wenn die Variationsgleichung*

   $$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - gv \, d\Omega = 0$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt.

Der Sobolevraum $H_0^1(\Omega)$ umfasst dabei den Raum V_{T_n}.

2. Die Ansatzfunktionen besitzen einen lokalen Träger, d.h. sie verschwinden jeweils im größeren Teil des Gebietes Ω_{T_n}. Als Konsequenz haben wir, dass A dünn besetzt ist.

3 Etwas Theorie zur Finite Elemente Methode

Sei Ω ein beschränktes Gebiet.

Definition 6 *Für $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt $\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}$ Träger von u.*

Definition 7 *$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp} u$ kompakt$\}$ ist der Raum der Testfunktionen.*

Letzterer Raum ist nicht leer, da insbesondere der Friedrichs'sche Molifier (der Glättungskern) $u_\varepsilon(\cdot - x_0)$ für alle $x_0 \in \Omega$ und $\varepsilon < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$ in diesem Raum liegt, wobei

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^n} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right), & |x| < \varepsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Definiere für $u \in C^1(\Omega)$, $v \in C_0^\infty(\Omega)$ die Abbildung

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}x.$$

Setze ferner $\langle g, v\rangle = \int_\Omega g(x)v(x)dx$. Dies definiert ein Skalarprodukt auf $C(\Omega)$.

Eine klassische Lösung $\overline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ erfüllt also

$$a(\overline{u}, v) = \langle g, v\rangle$$

für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Die Bilinearform a definiert auf $C_0^\infty(\Omega)$ ein Skalarprodukt, das eine Norm erzeugt, nämlich

$$\|u\|_a = \sqrt{a(u,u)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Mit $\|\cdot\|$ bezeichnen wir im folgenden die übliche Norm in $L^2(\Omega)$.

Der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ ist als Grundraum für die Gleichung $a(\overline{u}, v) = \langle g, v\rangle$ zu klein, da im allgemeinen $\overline{u} \notin C_0^\infty(\Omega)$.

Der Ansatz eines neuen Grundraums V ist:

$$V := \left\{u \in C(\overline{\Omega}) \mid \nabla u \text{ existiert und ist stückweise stetig}, u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\right\}.$$

Das Ziel ist es, die Gleichung $a(\overline{u}, v) = \langle g, v\rangle$ für alle $v \in V$ zu erstellen.

Satz 8 *Gültig sind die Aussagen*

1. $a : V \times V \to \mathbb{R}$ *ist ein Skalarprodukt*
2. $C_0^\infty(\Omega)$ *liegt dicht in* V *bzgl* $\|\cdot\|_a$ *und* $\|\cdot\|$

Definition 9 $\overline{u} \in V$ *heißt schwache (variationelle) Lösung von (1), wenn* $a(\overline{u}, v) = \langle g, v\rangle$ *für alle* $v \in V$ *gilt.*

Lemma 10 *Ist* $\overline{u}$ *eine klassische Lösung von (1), so ist* $\overline{u}$ *auch eine schwache Lösung.*

Lemma 11 *Die variationelle Lösung stimmt mit der Lösung der Minimierungsaufgabe*

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle g, v\rangle = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v|^2 - gv\, dx \to \min_{v\in V}$$

überein.

Lemma 12 *Die schwache Lösung ist eindeutig.*

Der Unterschied zwischen den Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|$ ist wesentlich, da sie auf V nicht äquivalent sind und damit verschiedene Konvergenzbegriffe erzeugen.

Die normierten Räume $(V, \|\cdot\|)$ und $(V, \|\cdot\|_a)$ sind nicht vollständig. Die Vollständigkeit ist aber essentiell, um die Minimierungsprobleme zu lösen!

Vergrößere nun V nach dem Prinzip der Vollständigkeit ohne die bisherigen Ergebnisse zu verletzen.

Definition 13 *Es sei* $L^2(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, u \text{ meßbar}, |u|^2 \text{ Lebesgue-integrierbar}\}$ *mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

versehen.

Lemma 14 *Ist* $u \in C^k(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \le k$, *so gilt*

$$\int_\Omega \nabla^\alpha u\varphi\, dx = (-1)^k \int_\Omega u\nabla^\alpha\varphi\, dx.$$

Dies motiviert die folgende Definition

Definition 15 *Für* $u \in L^2(\Omega)$ *heißt* $v \in L^2(\Omega)$ *(allgemeiner:* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$*) schwache oder verallgemeinerte Ableitung* $\nabla^\alpha u$ *der Ordnung* α *von* u*, falls*

$$\int_\Omega v\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\nabla^\alpha\varphi dx$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Bemerkung 16 *Ist $u \in C^k(\Omega)$, so besitzt u schwache Ableitungen $\nabla^\alpha u$, $|\alpha| \leq k$ und diese stimmen mit den klassischen Ableitungen überein.*

Definiere

$$W^k(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \,|\, \nabla^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq k\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{W^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \nabla^\alpha u, \nabla^\alpha v \rangle.$$

Definition 17 *$W^k(\Omega)$ heißt ein Sobolevraum.*

Statt dieser Verallgemeinerung der klassischen Ableitung im „schwachen Sinn" ist auch eine Verallgemeinerung im „starken Sinn" möglich:

$$H^k(\Omega) = \overline{C^k(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^k(\Omega)}}.$$

Satz 18 *Es gilt: $W^k(\Omega) = H^k(\Omega)$.*

Die Räume $H^k(\Omega)$ und $W^k(\Omega)$ sind vollständig. Die richtige Wahl für V ist der Raum

$$V = H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \,|\, u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Bemerkung 19 *Da die Elemente aus $H_0^1(\Omega)$ nicht stetig sein müssen, ist der Ausdruck „$u = 0$ auf $\partial\Omega$" möglicherweise nicht definiert. Dieser lässt sich aber im schwachen Sinne erklären.*

Satz 20 *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $\partial\Omega$ stückweise glatt. Dann existiert eindeutig ein linearer stetiger Operator*

$$\Gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$$

derart, dass $\Gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$ für alle $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Man nennt $\Gamma(u)$ ein Spuroperator oder verallgemeinerte Randwerte von u. Dann ist

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \,|\, \Gamma(u) = 0\}$$

sinnvoll erklärt.

Bemerkung 21 *Die Räume $H_0^1(\Omega)$ und $W_0^1(\Omega)$ definiert man wie folgt*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^1(\Omega)}},$$
$$W_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \,|\, \forall F \in (L^2(\Omega))^n, \nabla' F \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u \nabla' F \, d\Omega = \int_\Omega \nabla u F \, d\Omega \right\}.$$

Die schwache Formulierung von (1) mit $\gamma = 0$ lautet damit wie folgt. Gesucht ist ein $\overline{u} \in V = H_0^1(\Omega)$ mit

$$a(\overline{u}, v) = b(v), \quad \forall v \in V$$

wobei $b(v) = \int_\Omega g(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

Ist $\gamma \neq 0$, so ist $u - \gamma \in H_0^1(\Omega)$. $w = u - \gamma$ sei die Lösung von $-\Delta w = g + \Delta\gamma$. So löst $u = w + \gamma$ die Gleichung $-\Delta u = g$ und erfüllt die Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = \gamma$.

Es bleibt uns noch zu zeigen, dass die Anfangswertaufgabe (1) schwach lösbar ist. Dafür verwenden wir den

Satz 22 Lax und Milgram

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $B(\cdot,\cdot)$ eine Bilinearform auf $\mathcal{H}$ mit

i) $\exists c > 0 \,:\, \forall u, v \in \mathcal{H} \,:\, |B(u,v)| \leq c\|u\|\|v\|$

ii) $\exists p > 0 \,:\, \forall u \in \mathcal{H} \,:\, B(u,u) \geq p\|u\|^2$

Dann existiert für alle $F \in \mathcal{H}'$ genau ein $u \in \mathcal{H}$, so dass für alle $v \in \mathcal{H}$

$$Fv = B(v, u)$$

gilt.

Bemerkung 23 *Die Bedingungen i) und ii) heißen Stetigkeit bzw. Koerzitivität (in Numerik: $\mathcal{H}$-Elliptizität).*

Die Schwarzsche Ungleichung besagt nun

$$a(u,v) \leq \|u\|\|v\| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u, v \in V.$$

Die Poincarésche Ungleichung liefert

$$a(u,u) = \|\nabla u\|^2 \geq \min\{1, c^2\}\|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in V,$$

wobei $c = c(\Omega) > 0$ die Poincarésche Konstante bezeichne.

Wegen

$$|bv| \leq \|v\|\|g\| \leq \|v\|\|g\|_{H^1(\Omega)}$$

handelt es sich bei b um ein stetiges lineares Funktional auf V.

Da a und b alle Voraussetzungen vom Satz 22 erfüllen, folgt es, dass die Randwertaufgabe 1 eindeutig schwach lösbar in V ist, falls $g \in L^2(\Omega)$.