

Adaptivität I - Motivation

Hubertus Bromberger, Manuel Nesensohn, Johannes
Reinhardt, Johannes Schnur

25. Oktober 2007

Adaptivität

- ▶ Die Finite Elemente Methode (FEM) ermöglicht die näherungsweise Lösung von Randwertproblemen
- ▶ Das Gebiet Ω wird trianguliert

Triangulierung	Fehler	Rechenaufwand
Fein	klein	groß
Grob	grob	klein

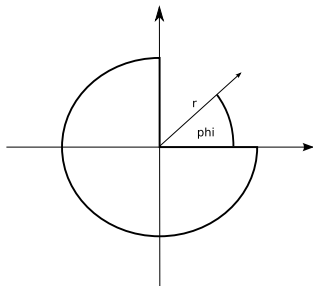
- ▶ Wir wollen aber Kleine Fehler und Kleinen Rechenaufwand!

Ein erstes Beispiel

- ▶ Betrachte Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}$$

mit $\Omega = \overline{B(0,1)} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$
und $g(r, \varphi) = r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2}{3}\varphi) - \frac{r^2}{4}$



Die Analytische Lösung

- ▶ Die analytische Lösung ist gegeben durch

$$u(r, \varphi) = g(r, \varphi) = r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2}{3}\varphi\right) - \frac{r^2}{4},$$

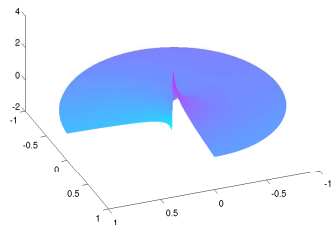
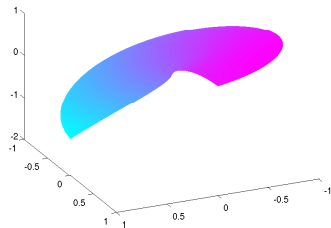
- ▶ und ihr Gradient durch

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \frac{1}{r^{\frac{1}{3}}} \sin\left(\frac{2}{3}\varphi\right) \cos(\varphi) - \frac{3}{4} r^{\frac{4}{3}} \cos(\varphi) - \cos\left(\frac{2}{3}\varphi\right) \sin(\varphi) \\ \frac{2}{3} \frac{1}{r^{\frac{1}{3}}} \sin\left(\frac{2}{3}\varphi\right) \sin(\varphi) - \frac{3}{4} r^{\frac{4}{3}} \sin(\varphi) + \cos\left(\frac{2}{3}\varphi\right) \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

- ▶ Der Gradient, nicht aber die Funktion, hat einen Pol an der Stelle $r = 0$, deshalb sind dort interessante Effekte zu erwarten

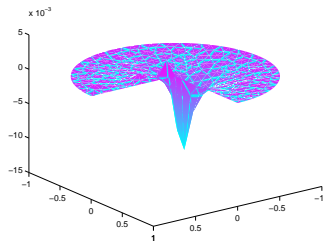
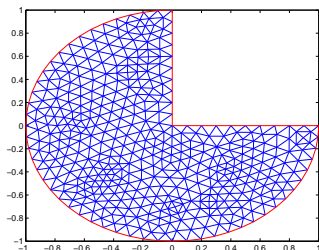
Bilder

- ▶ Analytische Lösung
- ▶ y Komponente des Gradienten der analytischen Lösung



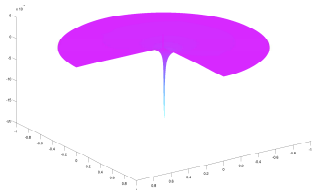
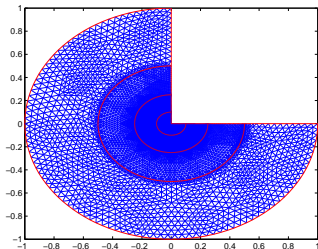
Erste numerische Lösung

- ▶ Zur Lösung verwendetes grobes Gitter
- ▶ Differenz der numerischen zur analytischen Lösung
- ▶ Größte Fehler um Nullpunkt herum, darum geschickte Verfeinerung des Gitters



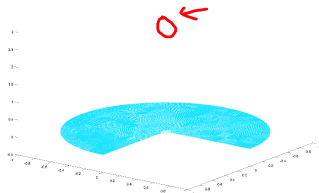
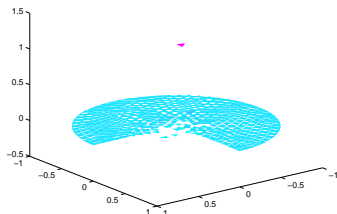
Geschicht verfeinerte Lösung

- ▶ In Ringen verfeinertes Gitter, innen dichter als außen
- ▶ Differenz der numerischen zur analytischen Lösung
- ▶ Bzgl. L^∞ wird Fehler größer, aber Konvergenz in L^2 und vermutlich in H^2
- ▶ Bei der Berechnung der H^2 Norm wurde der Nullpunkt wegen des Pols nicht berücksichtigt



Fehler der Gradienten

- ▶ y Komponente der Differenz der Gradienten für grobes und verfeinertes Gitter
- ▶ Man kann die Konvergenz bezüglich der H^2 Norm „erahnen“



Effizienzvergleich

	global	lokal
Anzahl Dreiecke	204800	41357
Rechenzeit	10.3 s	5.4 s
$\ \cdot \ _{L^2}$	0.02	0.015
$ \cdot _{H^2}$	$4.7 \cdot 10^{-5}$	$6.7 \cdot 10^{-5}$

- ▶ Die H^2 ist nur bedingt aussagekräftig, weil der Nullpunkt nicht beachtet wurde
- ▶ Die Rechenzeit für das geschickt verfeinerte Gitter ist nur halb so lang
- ▶ Der Fehler dabei auch noch deutlich kleiner
- ▶ Großer Effizienzgewinn

Kondensator

- ▶ Es gibt positive (+) und negative (-) elektrische Ladungen
- ▶ Die Wechselwirkung zwischen Ladungen kann man auch als “Elektrisches Feld” \vec{E} beschreiben
- ▶ Das elektrische Feld
 - ▶ ist ein Vektorfeld $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$
 - ▶ gibt an jeder Stelle die Richtung und den Betrag der Kraft auf eine (+) Ladung an
 - ▶ kann als Gradient eines skalaren Feldes φ dargestellt werden

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

Kondensator

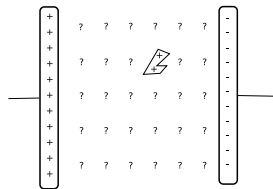
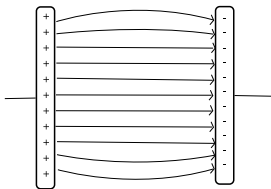
Das skalare Feld φ

- ▶ nennt man elektrostatisches Potential
- ▶ gibt die Energie an, die man braucht, um eine (+) Ladung aus dem Unendlichen bis an diese Stelle zu schieben
- ▶ hängt wiederum von der Ladungsverteilung ab

$$\Delta\varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Kondensator

- ▶ Wichtiges Bauteil, essentiell in vielen Schaltungen
- ▶ 2 Platten ohne direkte elektrische Verbindung (stark vereinfacht)
- ▶ Auf den Platten sitzen Ladungen



Durchführung (Notfall)

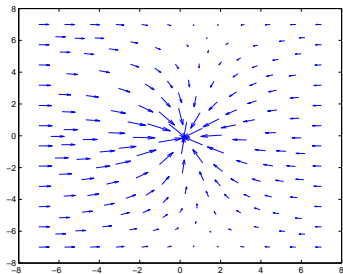
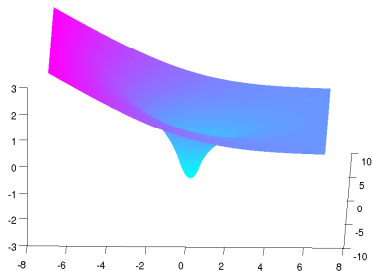
- ▶ *Problem:* unendlich ausgedehnter Kondensator mit Ladung im Innenraum
- ▶ *Ziel:* Berechnung von Potential und Feldlinien, vor allem direkt um die Ladung herum
- ▶ Modellierung der Geometrie in PDE Tool
- ▶ Berechnung des Potentials aus der Ladungsverteilung und der Feldlinien aus dem Potential

$$\Delta\varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

Durchführung

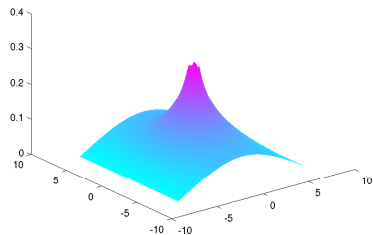
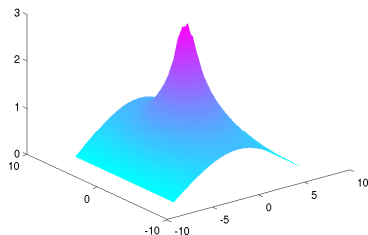
- ▶ *Problem:* unendlich ausgedehnter Kondensator mit Ladung im Innenraum
- ▶ *Ziel:* Berechnung von Potential und Feldlinien, vor allem direkt um die Ladung herum
- ▶ Modellierung der Geometrie in PDE Tool
- ▶ Berechnung des Potentials aus der Ladungsverteilung und der Feldlinien aus dem Potential

Ergebnisse



Ergebnisse II

- ▶ Fehler nach 2 globalen Verfeinerungen (697 Punkte)
- ▶ Fehler nach 5 globalen Verfeinerungen (42081 Punkte)



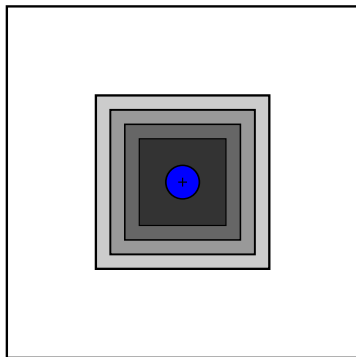
Problem

- ▶ Vergleich mit 7 mal global verfeinerter Lösung (669057 Punkte) in L^∞ und H^2 Norm
- ▶ Rapides Ansteigen der Knotenzahl und der Laufzeit bei moderater Verbesserung des Ergebnisses

Verfein.	Knoten	L^∞	H^2	Laufzeit
1	186	7.688	39.34	0.8 s
2	697	2.921	12.94	0.6 s
3	2697	1.538	7.12	0.7 s
4	10609	0.747	3.35	2.5 s
5	42081	0.290	1.26	15.9 s
6	167617	0.106	0.47	143.2 s

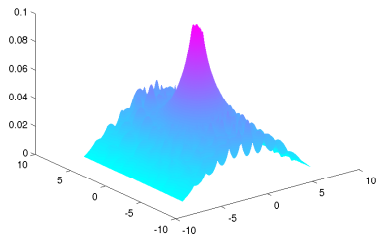
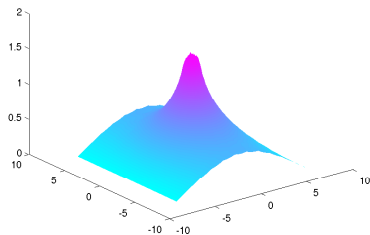
Adaptivität

- ▶ Lokale Verfeinerung des Gitters in den interessanten Bereichen
- ▶ Hier: Intuitives Vorgehen, verfeinern von kleiner werdenden quadratischen Bereichen um die Ladungsverteilung herum



Ergebnisse Adaptivität

- ▶ Fehler nach 3 lokalen Verfeinerungen (741 Gitterpunkte)
- ▶ Fehler nach 6 lokalen Verfeinerungen (6933 Gitterpunkte)



Ergebnisse Adaptivität II

- ▶ Vergleich mit 7 mal global verfeinerter Lösung (669057 Punkten) in L^∞ und H^2 Norm

Verfein.	Knoten	L^∞	H^2	Laufzeit
1	186	7.687	39.34	0.67 s
2	358	2.911	12.91	0.51 s
3	741	1.527	7.08	0.19 s
4	1625	0.738	3.32	0.43 s
5	3550	0.281	1.26	1.37 s
6	6933	0.098	0.59	6.67 s

Fazit

- ▶ Ein geeignet verfeinertes Gitter ermöglicht massive Einsparung (Faktor 40) von Rechenzeit
- ▶ Die Genauigkeit wird dabei nicht oder kaum beeinträchtigt
- ▶ *Bisher*: intuitives, manuelles Vorgehen
- ▶ *Nachteil*: aufwendig, nicht “optimal”
- ▶ *Ziel*: Entwicklung von Methoden und Werkzeugen zur vollautomatischen Gitterverfeinerung

