FEMs höherer Ordnung

2. Demonstration in 1D

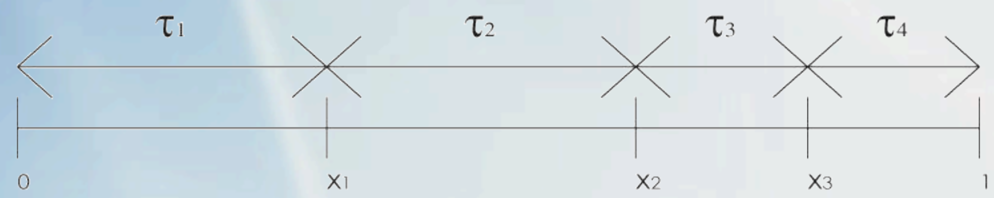
Universität Konstanz
Seminar Praktikum FEM
Dozentin: Vita Rutka
Referenten: Tim Seger, Felix Kleber, Johannes Meller

Gliederung:

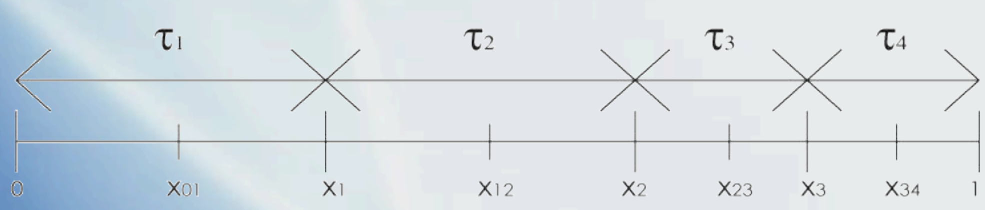
1. Grundaufbau
   - Konstruktion der quadr. Nodalbasen
   - Besetzung der Stefigkeitsmatrix
2. Implimentierung
   - Beispiel: u''(x) = sin(x)
3. Fehlerbetrachtung

Grundüberlegungen für quad. Nodalbasen:

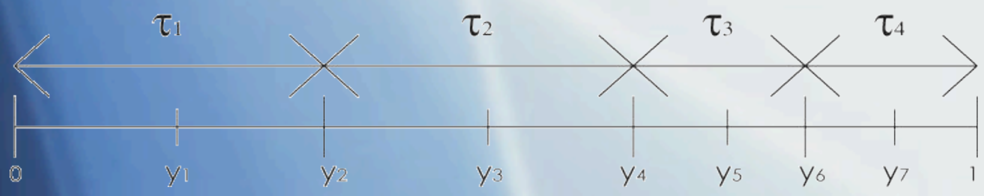
- gegeben: „Dreieckszerlegung“



- Mittelpunkteinfügung:

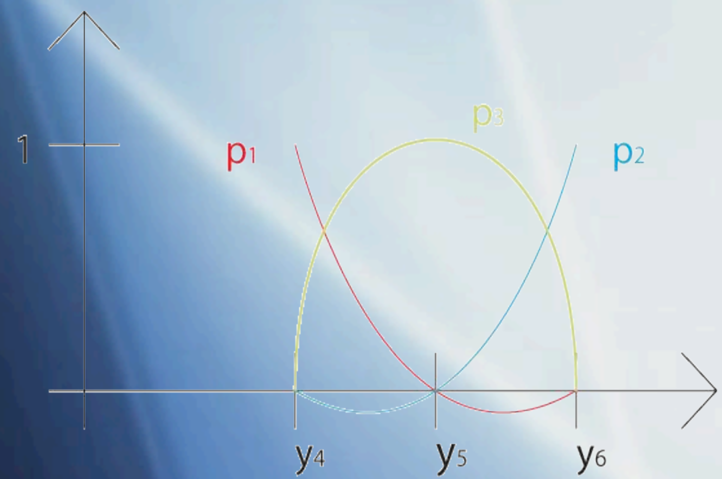


- Umnummerierung:



Basispolynome

- für jedes Teilintervall τ_i stehen drei Basispolynome zur Verfügung
- ergeben sich als Interpolationspolynome
- Bsp.: τ_3



$$es\ gilt\ p_1^{\tau_3}(y_4) = 1\ sowie\ p_1^{\tau_3}(y_5) = p_1^{\tau_3}(y_6) = 0$$

$$\Rightarrow p_1^{\tau_3}(x) = \left(\frac{x - y_5}{y_4 - y_5}\right)\left(\frac{x - y_6}{y_4 - y_6}\right)$$

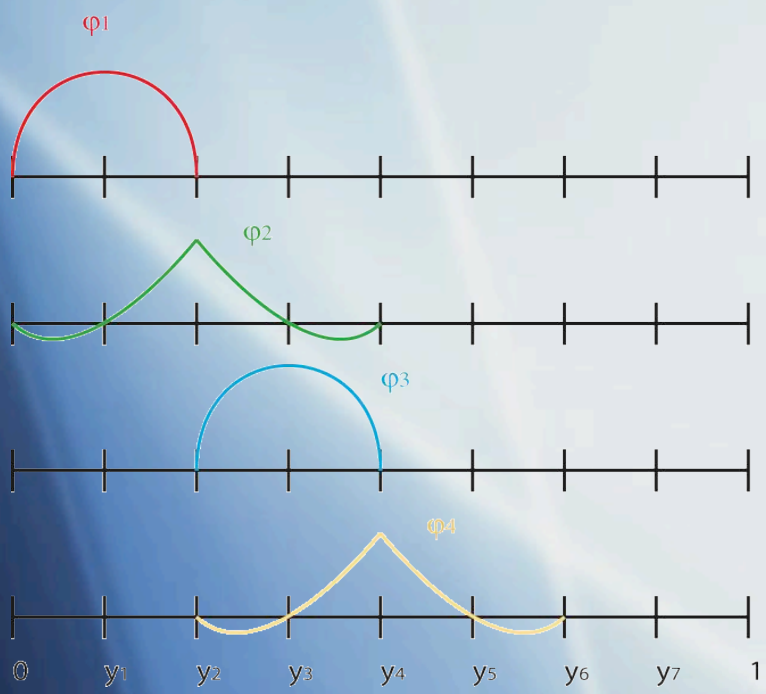
$$analog\ folgt:$$

$$p_2^{\tau_3}(x) = \left(\frac{x - y_4}{y_5 - y_4}\right)\left(\frac{x - y_6}{y_5 - y_6}\right)$$

$$p_3^{\tau_3}(x) = \left(\frac{x - y_4}{y_6 - y_4}\right)\left(\frac{x - y_5}{y_6 - y_5}\right)$$

Konstruktion der Nodalbasen:

- ausgehend von den Basispolynomen ergeben sich folg. φ_i



$$\phi_1 = p_3^{\tau_1}$$

$$\phi_2 = \begin{cases} p_2^{\tau_1}, & 0 \leq x \leq y_2 \\ p_1^{\tau_2}, & y_2 \leq x \leq y_4 \end{cases}$$

$$\phi_3 = p_3^{\tau_2}$$

$$\phi_4 = \begin{cases} p_2^{\tau_2}, & y_2 \leq x \leq y_4 \\ p_1^{\tau_3}, & y_4 \leq x \leq y_6 \end{cases}$$

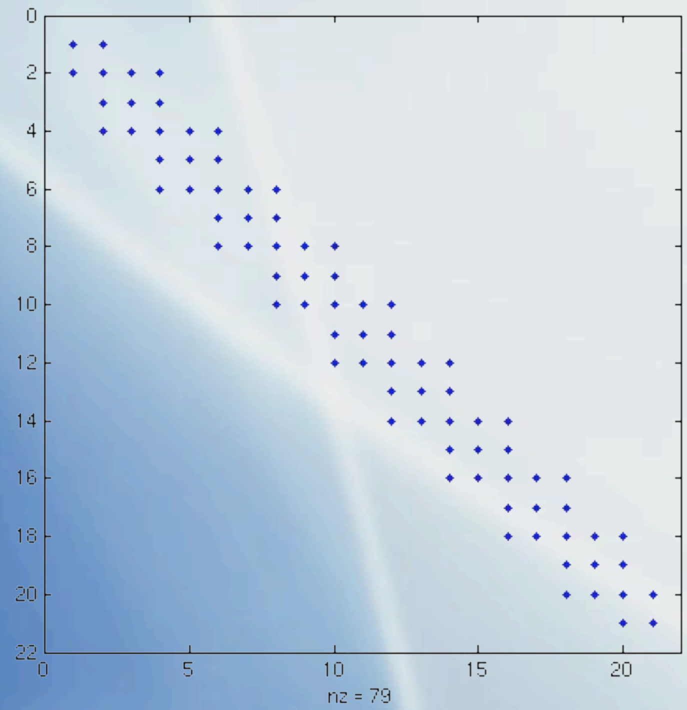
$usw.$

Matrixbelegung:

- aus Skizzen ist folg. ersichtlich:

$$a(\phi_i, \phi_j) = 0 \; falls \; i < j + 3$$

- d.h.: Einträge $\neq 0$ in Hauptdiagonalen sowie 1. und 2. Nebendiagonale



Programm...

Konvergenzstudie

Wiederholung:

- $sei\ u \in H^{m+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\ kontinuierliche\ Loesung$
- $sei\ u_h\ diskrete\ Loesung$
- $fuer\ L^\infty\ gilt:$

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq Ch^m |u|_{H^{m+1}}.$$

$\Rightarrow fuer\ P_2 - Basisfunktionen\ kann\ auf\ Konvergenzordnung\ 2\ gehofft\ werden$

Test mit $u''=\sin(x)$, $u(0)=u(2\pi)=0$

N	2N+1	$\|\|u_h + \sin(x)\|\|_\infty$	Faktor	Zeit
5	11	$8.0 \cdot 10^{-3}$		00.15s
10	21	$1.5 \cdot 10^{-3}$	5.3	00.16s
15	31	$4.8 \cdot 10^{-4}$	3.1	00.18s
20	41	$2.1 \cdot 10^{-4}$	2.5	00.18s
50	101	$1.5 \cdot 10^{-5}$		00.28s
100	201	$1.9 \cdot 10^{-6}$	7.9	00.52s
200	401	$2.4 \cdot 10^{-7}$	7.9	01.00s
400	801	$3.1 \cdot 10^{-8}$	7.7	02.70s
500	1001	$1.5 \cdot 10^{-8}$		03.60s
1000	2001	$2.0 \cdot 10^{-9}$	7.5	11.80s

Fehlerverhältnis - Vergleich P_1

Stützstellen	P_1-Elemente $\|\|u+\sin(x)\|\|_\infty$	P_2-Elemente $\|\|u+\sin(x)\|\|_\infty$	P1/P2
5	0.21	0.068	3:1
25	$8.50 \cdot 10^{-3}$	$9.02 \cdot 10^{-4}$	9:1
51	$2.00 \cdot 10^{-3}$	$1.12 \cdot 10^{-4}$	18:1
101	$4.90 \cdot 10^{-4}$	$1.50 \cdot 10^{-5}$	33:1
501	$1.97 \cdot 10^{-5}$	$1.25 \cdot 10^{-7}$	158:1
751	$8.75 \cdot 10^{-6}$	$3.75 \cdot 10^{-8}$	233:1
901	$6.14 \cdot 10^{-6}$	$2.17 \cdot 10^{-8}$	283:1