Adaptivität II - Theorie

Hubertus Bromberger, Manuel Nesensohn, Johannes Reinhardt, Johannes Schnur

8. November 2007

Fazit des ersten Vortrages

- Ein geeignet verfeinertes Gitter ermöglicht massive Einsparung von Rechenzeit
- Die Genauigkeit wir dabei nicht oder kaum beeinträchtigt
- **Bisher:** intuitives, manuelles Vorghen
- **Nachteil:** aufwendig, nicht optimal
- **Ziel:** Entwicklung von Methoden und Werkzeugen zur Fehlerschätzung und dadurch zielgerichtete Gitterverfeinerung

Die **D**ual **W**eighted **R**esidual Methode im $\mathbb{R}^n$

Die DWR - Methode im $\mathbb{R}^n$

Sei $A, A_h \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b, b_h \in \mathbb{R}^n$, mit $b_h \longrightarrow b$ und $A_h \longrightarrow A$ für $h \longrightarrow 0$. Wir betrachten das Problem

$$Ax = b,$$

Die DWR - Methode im $\mathbb{R}^n$

Sei $A, A_h \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b, b_h \in \mathbb{R}^n$, mit $b_h \longrightarrow b$ und $A_h \longrightarrow A$ für $h \longrightarrow 0$. Wir betrachten das Problem

$$Ax = b,$$

und das approximierende Problem

$$A_h x_h = b_h$$

Die DWR - Methode im $\mathbb{R}^n$

Sei $A, A_h \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b, b_h \in \mathbb{R}^n$, mit $b_h \rightarrow b$ und $A_h \rightarrow A$ für $h \rightarrow 0$. Wir betrachten das Problem

$$Ax = b,$$

und das approximierende Problem

$$A_h x_h = b_h$$

Man führt folgende Bezeichnungen ein:

Die DWR - Methode im $\mathbb{R}^n$

Sei $A, A_h \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b, b_h \in \mathbb{R}^n$, mit $b_h \to b$ und $A_h \to A$ für $h \to 0$. Wir betrachten das Problem

$$Ax = b,$$

und das approximierende Problem

$$A_h x_h = b_h$$

Man führt folgende Bezeichnungen ein:

- approximation error: $e := x - x_h$.

Die DWR - Methode im $\mathbb{R}^n$

Sei $A, A_h \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b, b_h \in \mathbb{R}^n$, mit $b_h \to b$ und $A_h \to A$ für $h \to 0$. Wir betrachten das Problem

$$Ax = b,$$

und das approximierende Problem

$$A_h x_h = b_h$$

Man führt folgende Bezeichnungen ein:

- approximation error: $e := x - x_h$.
- residual: $\rho := b - Ax_h$.

Die DWR - Methode im $\mathbb{R}^n$

Sei $A, A_h \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b, b_h \in \mathbb{R}^n$, mit $b_h \to b$ und $A_h \to A$ für $h \to 0$. Wir betrachten das Problem

$$Ax = b,$$

und das approximierende Problem

$$A_h x_h = b_h$$

Man führt folgende Bezeichnungen ein:

- approximation error: $e := x - x_h$.
- residual: $\rho := b - Ax_h$.
  Durch Einsetzen erhält man $Ae = b - Ax_h = \rho$.

Die DWR - Methode im $\mathbb{R}^n$

Sei $A, A_h \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b, b_h \in \mathbb{R}^n$, mit $b_h \to b$ und $A_h \to A$ für $h \to 0$. Wir betrachten das Problem

$$Ax = b,$$

und das approximierende Problem

$$A_h x_h = b_h$$

Man führt folgende Bezeichnungen ein:

- approximation error: $e := x - x_h$.
- residual: $\rho := b - Ax_h$.
  Durch Einsetzen erhält man $Ae = b - Ax_h = \rho$.

Das duale Problem im $\mathbb{R}^n$

Für $j \in \mathbb{R}^n$ sei

$$J(e) = J(u) - J(x_h) = (e, j),$$

das Fehlerfunktional.

Das duale Problem im $\mathbb{R}^n$

Für $j \in \mathbb{R}^n$ sei

$$J(e) = J(u) - J(x_h) = (e, j),$$

das Fehlerfunktional.
Dazu betrachten wir das duale Problem

$$A^* z = j.$$

Das duale Problem im $\mathbb{R}^n$

Für $j \in \mathbb{R}^n$ sei

$$J(e) = J(u) - J(x_h) = (e, j),$$

das Fehlerfunktional.
Dazu betrachten wir das duale Problem

$$A^* z = j.$$

Für das Fehlerfunktional gilt dann:

$$J(e) = (e, j) = (e, A^* z) = (Ae, z) = (\rho, z),$$

Das duale Problem im $\mathbb{R}^n$

Für $j \in \mathbb{R}^n$ sei

$$J(e) = J(u) - J(x_h) = (e, j),$$

das Fehlerfunktional.
Dazu betrachten wir das duale Problem

$$A^* z = j.$$

Für das Fehlerfunktional gilt dann:

$$J(e) = (e, j) = (e, A^* z) = (Ae, z) = (\rho, z),$$

was zu folgender Ungleichung führt:

$$|J(e)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\rho_i| \, |z_i| \, .$$

Fazit

- Damit haben wir jetzt eine **a posteriori** Abschätzung für das Fehlerfunktional gefunden.

Fazit

- Damit haben wir jetzt eine **a posteriori** Abschätzung für das Fehlerfunktional gefunden.
- Eigenschaften des Fehlerfunktional:

Fazit

- Damit haben wir jetzt eine **a posteriori** Abschätzung für das Fehlerfunktional gefunden.
- Eigenschaften des Fehlerfunktional:
  - Durch die Wahl von j kann man den Fehler an einem einzelnen Element oder an einer Gruppe von Elementen abschätzen.

Fazit

- Damit haben wir jetzt eine **a posteriori** Abschätzung für das Fehlerfunktional gefunden.
- Eigenschaften des Fehlerfunktional:
  - Durch die Wahl von j kann man den Fehler an einem einzelnen Element oder an einer Gruppe von Elementen abschätzen.
  - Wählt man z.B. $j = e_i$ erhält man eine Fehlerabschätzung für die i-te Komponente.

Fazit

- Damit haben wir jetzt eine **a posteriori** Abschätzung für das Fehlerfunktional gefunden.
- Eigenschaften des Fehlerfunktional:
  - Durch die Wahl von j kann man den Fehler an einem einzelnen Element oder an einer Gruppe von Elementen abschätzen.
  - Wählt man z.B. $j = e_i$ erhält man eine Fehlerabschätzung für die i-te Komponente.
  - Wählt man z.B. $j = (1, \ldots, 1)$ erhält man eine Abschätzung für $|e_1 + \cdots + e_n|$. Also einen gemittelten Fehler.

Fazit

- Damit haben wir jetzt eine **a posteriori** Abschätzung für das Fehlerfunktional gefunden.
- Eigenschaften des Fehlerfunktional:
  - Durch die Wahl von j kann man den Fehler an einem einzelnen Element oder an einer Gruppe von Elementen abschätzen.
  - Wählt man z.B. $j = e_i$ erhält man eine Fehlerabschätzung für die i-te Komponente.
  - Wählt man z.B. $j = (1, \dots, 1)$ erhält man eine Abschätzung für $|e_1 + \cdots + e_n|$. Also einen gemittelten Fehler.
- Berechnung der Elemente (ρ_i, z_i) der Ungleichung:

Fazit

- Damit haben wir jetzt eine **a posteriori** Abschätzung für das Fehlerfunktional gefunden.
- Eigenschaften des Fehlerfunktional:
  - Durch die Wahl von j kann man den Fehler an einem einzelnen Element oder an einer Gruppe von Elementen abschätzen.
  - Wählt man z.B. $j = e_i$ erhält man eine Fehlerabschätzung für die i-te Komponente.
  - Wählt man z.B. $j = (1, \dots, 1)$ erhält man eine Abschätzung für $|e_1 + \dots + e_n|$. Also einen gemittelten Fehler.
- Berechnung der Elemente (ρ_i, z_i) der Ungleichung:
  - Die Residuen ρ_i sind leicht zu berechnen.

Fazit

- Damit haben wir jetzt eine **a posteriori** Abschätzung für das Fehlerfunktional gefunden.
- Eigenschaften des Fehlerfunktional:
  - Durch die Wahl von j kann man den Fehler an einem einzelnen Element oder an einer Gruppe von Elementen abschätzen.
  - Wählt man z.B. $j = e_i$ erhält man eine Fehlerabschätzung für die i-te Komponente.
  - Wählt man z.B. $j = (1, \dots, 1)$ erhält man eine Abschätzung für $|e_1 + \cdots + e_n|$. Also einen gemittelten Fehler.
- Berechnung der Elemente (ρ_i, z_i) der Ungleichung:
  - Die Residuen ρ_i sind leicht zu berechnen.
  - Um aber die Gewichte z_i zu berechnen muss das duale Problem gelöst werden, was in den Anwendungen sehr aufwendig sein kann.

Fazit

- Damit haben wir jetzt eine **a posteriori** Abschätzung für das Fehlerfunktional gefunden.
- Eigenschaften des Fehlerfunktional:
  - Durch die Wahl von j kann man den Fehler an einem einzelnen Element oder an einer Gruppe von Elementen abschätzen.
  - Wählt man z.B. $j = e_i$ erhält man eine Fehlerabschätzung für die i-te Komponente.
  - Wählt man z.B. $j = (1, \dots, 1)$ erhält man eine Abschätzung für $|e_1 + \dots + e_n|$. Also einen gemittelten Fehler.
- Berechnung der Elemente (ρ_i, z_i) der Ungleichung:
  - Die Residuen ρ_i sind leicht zu berechnen.
  - Um aber die Gewichte z_i zu berechnen muss das duale Problem gelöst werden, was in den Anwendungen sehr aufwendig sein kann.

Die **D**ual **W**eighted **R**esidual Methode im unendlichdimensionalen

Die Laplace Gleichung

Wir betrachten nun die Laplace-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

Die Laplace Gleichung

Wir betrachten nun die Laplace-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

beziehungsweise die schwache Formulierung:

$$a(u, \varphi) := (\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) =: V$$

Die Laplace Gleichung

Wir betrachten nun die Laplace-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

beziehungsweise die schwache Formulierung:

$$a(u, \varphi) := (\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) =: V$$

Durch Diskretisierung erhalten wir folgendes Problem ($V_h \subset V$, endlichdimensional)

$$a(u_h, \psi_h) = (f, \psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h$$

Die Laplace Gleichung

Wir betrachten nun die Laplace-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

beziehungsweise die schwache Formulierung:

$$a(u, \varphi) := (\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) =: V$$

Durch Diskretisierung erhalten wir folgendes Problem ($V_h \subset V$, endlichdimensional)

$$a(u_h, \psi_h) = (f, \psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h$$

Das Vorgehen ist nun analog zum endlichdimensionalen.

Die DWR-Methode im unendlichdimensionalen Fall

Wir betrachten das duale Problem:

$$a(\varphi, z) = J(\varphi), \quad \forall \varphi \in V = H_0^1,$$

wobei J ein gegebenes Fehlerfunktional ist.

Die DWR-Methode im unendlichdimensionalen Fall

Wir betrachten das duale Problem:

$$a(\varphi, z) = J(\varphi), \quad \forall \varphi \in V = H_0^1,$$

wobei J ein gegebenes Fehlerfunktional ist.
Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

Die DWR-Methode im unendlichdimensionalen Fall

Wir betrachten das duale Problem:

$$a(\varphi, z) = J(\varphi), \quad \forall \varphi \in V = H_0^1,$$

wobei J ein gegebenes Fehlerfunktional ist.
Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

- $V_h = \left\{ v \in V \colon v_{|K} \in P(K), K \in \mathbb{T}_h \right\}$

Die DWR-Methode im unendlichdimensionalen Fall

Wir betrachten das duale Problem:

$$a(\varphi, z) = J(\varphi), \quad \forall \varphi \in V = H_0^1,$$

wobei J ein gegebenes Fehlerfunktional ist.
Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

- $V_h = \{v \in V \colon v_{|K} \in P(K), K \in \mathbb{T}_h\}$
- Definiere $h_K = diam(K)$ und

Die DWR-Methode im unendlichdimensionalen Fall

Wir betrachten das duale Problem:

$$a(\varphi, z) = J(\varphi), \quad \forall \varphi \in V = H_0^1,$$

wobei J ein gegebenes Fehlerfunktional ist.
Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

- $V_h = \left\{ v \in V \colon v_{|K} \in P(K), K \in \mathbb{T}_h \right\}$
- Definiere $h_K = diam(K)$ und
- $R_{h|K} := f + \Delta u_h$

Die DWR-Methode im unendlichdimensionalen Fall

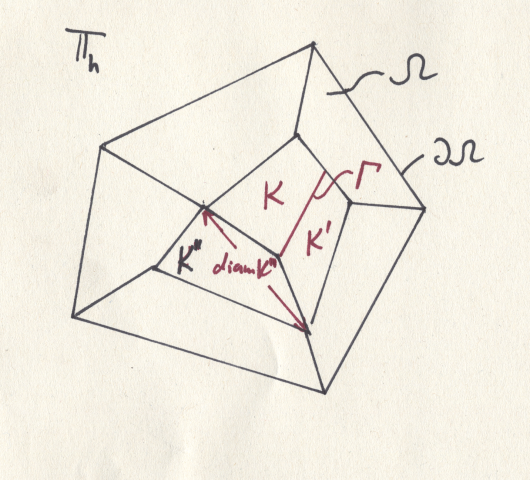
Wir betrachten das duale Problem:

$$a(\varphi, z) = J(\varphi), \quad \forall \varphi \in V = H_0^1,$$

wobei J ein gegebenes Fehlerfunktional ist.
Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

- $V_h = \left\{ v \in V : v_{|K} \in P(K), K \in \mathbb{T}_h \right\}$
- Definiere $h_K = diam(K)$ und
- $R_{h|K} := f + \Delta u_h$
- $r_{h|\Gamma} := \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\partial_n u_h \right], & \text{falls } \Gamma \subset \partial K \setminus \partial \Omega \\ 0, & \text{falls } \Gamma \subset \partial \Omega \end{cases}$

Skizze zu den Bezeichnungen



Die DWR-Methode im unendlichdimensionalen Fall

Mit diesen Bezeichnungen können wir folgenden Satz formulieren:

Die DWR-Methode im unendlichdimensionalen Fall

Mit diesen Bezeichnungen können wir folgenden Satz formulieren:

Satz

Für die approximierende Lösung gilt:

$$J(e) = \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \{(R_h, z - \psi_h)_K + (r_h, z - \psi_h)_{\partial K}\}$$

für ein beliebiges $\psi_h \in V_h$

Die DWR-Methode im unendlichdimensionalen Fall

Mit diesen Bezeichnungen können wir folgenden Satz formulieren:

Satz

Für die approximierende Lösung gilt:

$$J(e) = \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \{(R_h, z - \psi_h)_K + (r_h, z - \psi_h)_{\partial K}\}$$

für ein beliebiges $\psi_h \in V_h$ *und es gilt die a posteriori Ungleichung*

$$|J(e)| \leq \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \rho_K \omega_K$$

wobei

$$\rho_K := \left(\|R_h\|_K^2 + h_K^{-1} \|r_h\|_{\partial K}^2 \right)^{1/2}$$

$$\omega_K := \left(\|z - \psi_h\|_K^2 + h_k \|z - \psi_h\|_{\partial K}^2 \right)^{1/2}$$

für ein beliebiges $\psi_h \in V_h$.

Beispiele

- "Fehler der Energie-Norm":

$$J(\varphi) = (\nabla\varphi, \nabla e)\|\nabla e\|^{-1}$$

Beispiele

- "Fehler der Energie-Norm":

$$J(\varphi) = (\nabla\varphi, \nabla e)\|\nabla e\|^{-1}$$

- "Fehler an einer Stelle":

$$J_\varepsilon(\varphi) = (2\varepsilon)^{-1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi = \varphi(0) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Beispiele

- "Fehler der Energie-Norm":

$$J(\varphi) = (\nabla\varphi, \nabla e)\|\nabla e\|^{-1}$$

- "Fehler an einer Stelle":

$$J_\varepsilon(\varphi) = (2\varepsilon)^{-1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi = \varphi(0) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Beispiele 1: Energie-Norm

Als ein erstes Beispiel betrachten wir folgendes Fehlerfunktional

$$J(\varphi) = (\nabla\varphi, \nabla e)\|\nabla e\|^{-1}.$$

wobei e eine feste Größe ist.

Beispiele 1: Energie-Norm

Als ein erstes Beispiel betrachten wir folgendes Fehlerfunktional

$$J(\varphi) = (\nabla\varphi, \nabla e)\|\nabla e\|^{-1}.$$

wobei e eine feste Größe ist.
Das duale Problem ist gegeben durch:

$$a(\varphi, z) = (\nabla\varphi, \nabla e)\|\nabla e\|^{-1}, \quad \forall\varphi \in H_0^1.$$

Beispiele 1: Energie-Norm

Als ein erstes Beispiel betrachten wir folgendes Fehlerfunktional

$$J(\varphi) = (\nabla\varphi, \nabla e)\|\nabla e\|^{-1}.$$

wobei e eine feste Größe ist.
Das duale Problem ist gegeben durch:

$$a(\varphi, z) = (\nabla\varphi, \nabla e)\|\nabla e\|^{-1}, \quad \forall\varphi \in H_0^1.$$

In diesem Fall kann man z explizit durch $z = e\|\nabla e\|^{-1}$ angeben.

Fortsetzung von Beispiel 1

Der Satz liefert die Ungleichung:

$$J(e) = \|\nabla e\| \leq \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \rho_K \omega_K \leq \left(\sum_{K \in \mathbb{T}_h} h_K^2 \rho_K^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathbb{T}_h} h_K^{-2} \omega_K^2 \right)^{1/2}$$

Fortsetzung von Beispiel 1

Der Satz liefert die Ungleichung:

$$J(e) = \|\nabla e\| \le \sum_{K\in\mathbb{T}_h} \rho_K \omega_K \le \left(\sum_{K\in\mathbb{T}_h} h_K^2 \rho_K^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K\in\mathbb{T}_h} h_K^{-2} \omega_K^2 \right)^{1/2}$$

und mit der Interpolationsungleichung

$$\inf_{\psi_h\in V_h} \left(\sum_{K\in\mathbb{T}_h} \left\{ h_K^{-2} \|z-\psi_h\|_K^2 + h_K^{-1} \|z-\psi_h\|_{\partial K}^2 \right\} \right)^{1/2} \le c_1 \|\nabla z\|$$

Fortsetzung von Beispiel 1

Der Satz liefert die Ungleichung:

$$J(e) = \|\nabla e\| \le \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \rho_K \omega_K \le \left(\sum_{K \in \mathbb{T}_h} h_K^2 \rho_K^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathbb{T}_h} h_K^{-2} \omega_K^2 \right)^{1/2}$$

und mit der Interpolationsungleichung

$$\inf_{\psi_h \in V_h} \left(\sum_{K \in \mathbb{T}_h} \left\{ h_K^{-2} \|z - \psi_h\|_K^2 + h_K^{-1} \|z - \psi_h\|_{\partial K}^2 \right\} \right)^{1/2} \le c_1 \|\nabla z\|$$

folgt:

$$\|\nabla e\| \le c_I \left(\sum_{K \in \mathbb{T}_h} h_K^2 \rho_K^2 \right)^{1/2} \|\nabla z\| \le c_I \left(\sum_{K \in \mathbb{T}_h} h_K^2 \rho_K^2 \right)$$

Beispiel 2: lokaler Fehler (im $\mathbb{R}$)

Der Einfachheit halber sei $\Omega = (-1, 1)$

Beispiel 2: lokaler Fehler (im $\mathbb{R}$)

Der Einfachheit halber sei $\Omega = (-1, 1)$
Betrachte folgendes Fehlerfunktional:

$$J_\varepsilon(\varphi) = (2\varepsilon)^{-1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi = \varphi(0) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Beispiel 2: lokaler Fehler (im $\mathbb{R}$)

Der Einfachheit halber sei $\Omega = (-1, 1)$
Betrachte folgendes Fehlerfunktional:

$$J_\varepsilon(\varphi) = (2\varepsilon)^{-1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi = \varphi(0) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Das duale Problem ist dann:

$$a(\varphi, z) = J(\varphi), \quad \forall \varphi$$
$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \varphi' z' = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi$$

Lösungsideen für das Duale Problem:

Beispiel 3: lokaler Fehler (im $\mathbb{R}^2$)

$$J_\varepsilon(\varphi) = \lambda(B(0,\varepsilon)) \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi = \varphi(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Beispiel 3: lokaler Fehler (im $\mathbb{R}^2$)

$$J_\varepsilon(\varphi) = \lambda(B(0,\varepsilon)) \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi = \varphi(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Dann erhält man für den Fehler:

Beispiel 3: lokaler Fehler (im $\mathbb{R}^2$)

$$J_\varepsilon(\varphi) = \lambda(B(0,\varepsilon)) \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi = \varphi(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Dann erhält man für den Fehler:

$$|e(0)| = c_I \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \frac{h_K^3}{\sqrt{x^2 + e^2}} \rho_K.$$

Beispiel 3: lokaler Fehler (im $\mathbb{R}^2$)

$$J_\varepsilon(\varphi) = \lambda(B(0,\varepsilon)) \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi = \varphi(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Dann erhält man für den Fehler:

$$|e(0)| = c_I \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \frac{h_K^3}{\sqrt{x^2 + e^2}} \rho_K.$$

Es ist also sinvoll um die Stelle 0 herum zu verfeinern.