FEM höherer Ordnung

Beispiele in 2D

Felix Kleber, Johannes Meller, Tim Seger

15. November 2007

Gliederung

Gliederung

- Quadratische und kubische Basispolynome in 2D
- Konvergenzbetrachtungen in deal.ii
- Matrixstrukturen und Rechenkosten

Konstruktion von Basispolynomen

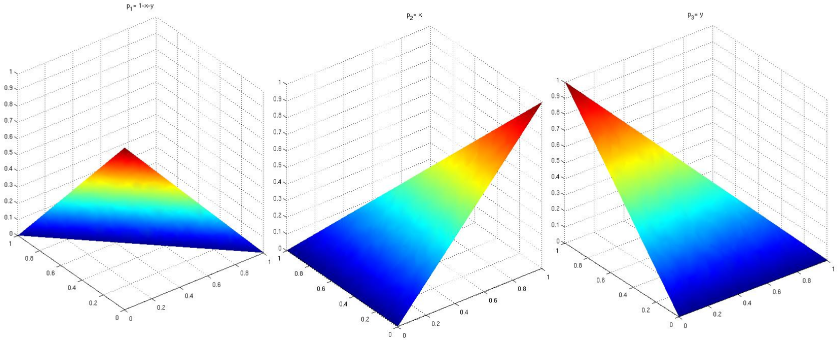
Zu einem gegebenen Element $\tau \subset \mathbb{R}^d$ wählt man einen Funktionenraum P_τ mit $dim(P_\tau) = n$ und n linear unabhängige stetige lineare Funktionale $B_i : C(\tau) \to \mathbb{R}$. Die Basispolynome $p_j \in P_\tau$ sind dann durch die Forderung $B_i(p_j) = \delta_{ij}$ eindeutig bestimmt.

Standardbeispiel

$\tau \subset \mathbb{R}^d, P_\tau = P_k(\tau)$
Für k=1: $B_i(p) := p(a_i)$, wobei a_i d+1 verschiedene Punkte in τ sind (z.B. Eckpunkte, Mittelpunkt usw.). Die Bestimmung der Basispolynome erfolgt über das aus $B(p_j) = p_j(a_i) = \delta_{ij}$ resultierende Gleichungssystem.

Standardbeispiel

$\tau \subset \mathbb{R}^d, P_\tau = P_k(\tau)$
Für k=1: $B_i(p) := p(a_i)$, wobei a_i d+1 verschiedene Punkte in τ sind (z.B. Eckpunkte, Mittelpunkt usw.). Die Bestimmung der Basispolynome erfolgt über das aus $B(p_j) = p_j(a_i) = \delta_{ij}$ resultierende Gleichungssystem.

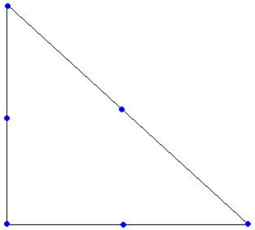


Quadratische Basispolynome auf Dreiecken

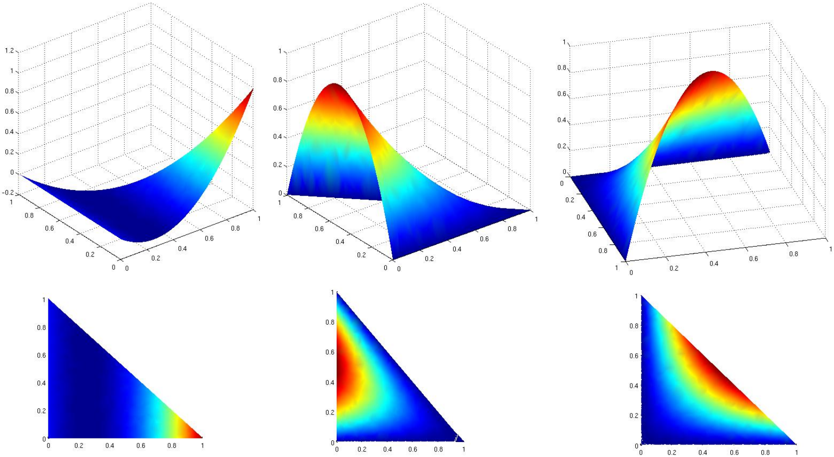
$\tau \subset \mathbb{R}^2, P_\tau = P_2(\tau), dim(P_\tau) = 6$.
Funktionale $B_i(p) = p(a_i)$, wobei die a_i die Eck- oder Seitenmittelpunkte sind.
Allgemeine Form der p_i:
$p_i(\xi, \eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2$.
Zu erwartende Konvergenzordnung (bei geigneter Regularität der analytischen Lösung): 2 bzgl. $||.||_{H^1}$ und $||.||_{L^\infty}$; 3 bzgl. $||.||_{L^2}$.

Quadratische Basispolynome auf Dreiecken

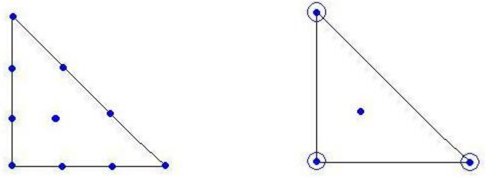
$\tau \subset \mathbb{R}^2, P_\tau = P_2(\tau), dim(P_\tau) = 6.$
Funktionale $B_i(p) = p(a_i)$, wobei die a_i die Eck- oder Seitenmittelpunkte sind.
Allgemeine Form der p_i:
$p_i(\xi, \eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2.$
Zu erwartende Konvergenzordnung (bei geeigneter Regularität der analytischen Lösung): 2 bzgl. $||.||_{H^1}$ und $||.||_{L^\infty}$; 3 bzgl. $||.||_{L^2}$.



Quadratische Basispolynome

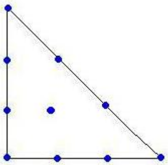
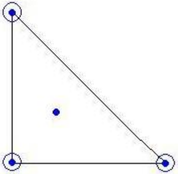


Kubische Basispolynome auf Dreiecken



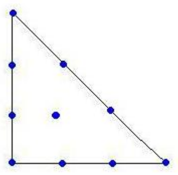
- Hinzunahme weiterer Punkte: z.B. zwei Punkte pro Dreiecksseite; zusätzlich Schwerpunkt. Funktionale: Auswertung des Polynoms an den gewählten Stellen ($\rightarrow$ *Lagrange*-Interpolationspolynome).

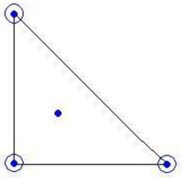
Kubische Basispolynome auf Dreiecken

- Hinzunahme weiterer Punkte: z.B. zwei Punkte pro Dreiecksseite; zusätzlich Schwerpunkt. Funktionale: Auswertung des Polynoms an den gewählten Stellen ($\rightarrow$ *Lagrange*-Interpolationspolynome).
- Andere lineare Funktionale: Auswertung der Polynome selbst und ihrer **Ableitungen** ($\rightarrow$ *Hermite*-Interpolationspolynome).

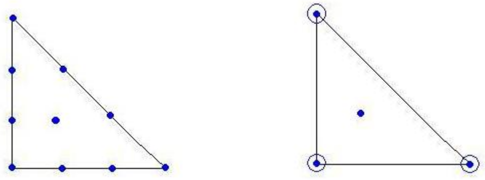
Kubische Basispolynome auf Dreiecken





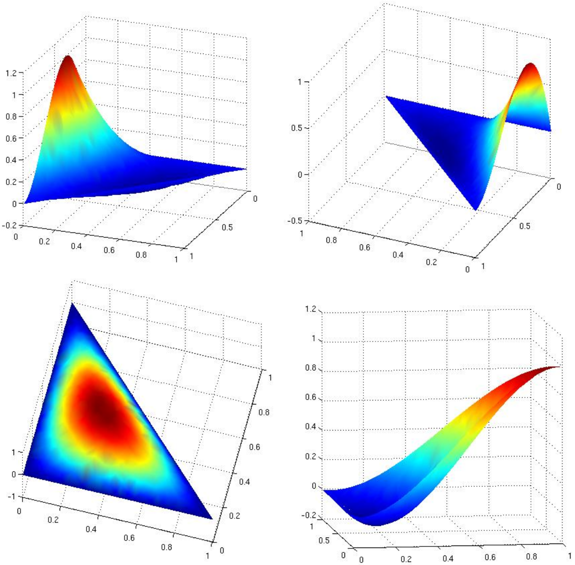
- Hinzunahme weiterer Punkte: z.B. zwei Punkte pro Dreiecksseite; zusätzlich Schwerpunkt. Funktionale: Auswertung des Polynoms an den gewählten Stellen ($\rightarrow$ *Lagrange*-Interpolationspolynome).
- Andere lineare Funktionale: Auswertung der Polynome selbst und ihrer **Ableitungen** ($\rightarrow$ *Hermite*-Interpolationspolynome).
- $p(\xi, \eta) =$
  $a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2 + a_6\xi\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi^3 + a_9\eta^3.$

Kubische Basispolynome auf Dreiecken



- Hinzunahme weiterer Punkte: z.B. zwei Punkte pro Dreiecksseite; zusätzlich Schwerpunkt. Funktionale: Auswertung des Polynoms an den gewählten Stellen ($\rightarrow$ *Lagrange*-Interpolationspolynome).
- Andere lineare Funktionale: Auswertung der Polynome selbst und ihrer **Ableitungen** ($\rightarrow$ *Hermite*-Interpolationspolynome).
- $p(\xi, \eta) =$
  $a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2 + a_6\xi\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi^3 + a_9\eta^3.$
- Konvergenzordnung: 3 bzgl. $||.||_{H^1}$ und $||.||_{L^\infty}$; 4 bzgl. $||.||_{L^2}$.

Kubische Hermitesche Basispolynome



Biquadratische Basispolynome auf Vierecken

- Deal.ii arbeitet mit viereckigen Triangulierungen. Hier müssen alle Basispolynome linear, bzw. quadratisch (usw.) in jeder Variablen sein. Für $\mathbb{R}^2$ ergeben sich also bilinieare, biquadratische,... Basispolynome.

Biquadratische Basispolynome auf Vierecken

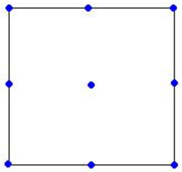
- Deal.ii arbeitet mit viereckigen Triangulierungen. Hier müssen alle Basispolynome linear, bzw. quadratisch (usw.) in jeder Variablen sein. Für $\mathbb{R}^2$ ergeben sich also bilinieare, biquadratische,... Basispolynome.
- $p(\xi, \eta) =$
  $a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2 + a_6\xi\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi^2\eta^2$

Biquadratische Basispolynome auf Vierecken

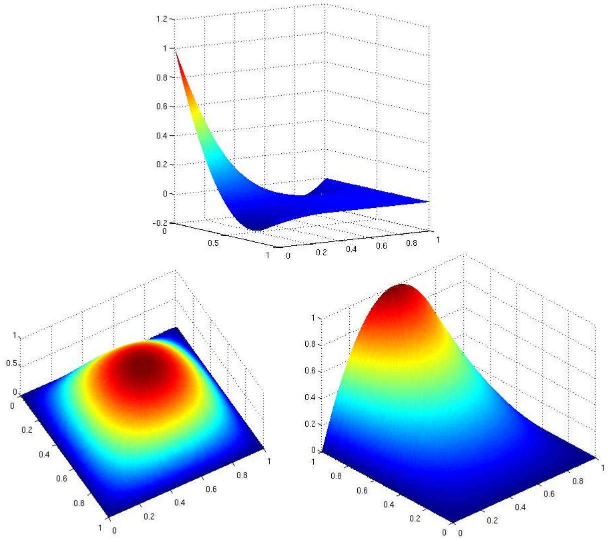
- Deal.ii arbeitet mit viereckigen Triangulierungen. Hier müssen alle Basispolynome linear, bzw. quadratisch (usw.) in jeder Variablen sein. Für $\mathbb{R}^2$ ergeben sich also bilinieare, biquadratische,... Basispolynome.
- $p(\xi, \eta) =$
  $a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2 + a_6\xi\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi^2\eta^2$
- Konvergenzordnung: 2 bzgl. $||.||_{H^1}$ und $||.||_{L^\infty}$; 3 bzgl. $||.||_{L^2}$.

Biquadratische Basispolynome auf Vierecken

- Deal.ii arbeitet mit viereckigen Triangulierungen. Hier müssen alle Basispolynome linear, bzw. quadratisch (usw.) in jeder Variablen sein. Für $\mathbb{R}^2$ ergeben sich also bilinieare, biquadratische,... Basispolynome.
- $p(\xi, \eta) =$
  $a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2 + a_6\xi\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi^2\eta^2$
- Konvergenzordnung: 2 bzgl. $||.||_{H^1}$ und $||.||_{L^\infty}$; 3 bzgl. $||.||_{L^2}$.
- Funktionale: Polynomauswertung; auch möglich: Auswertung von 1. oder 2.Ableitung

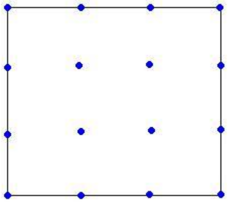


Biquadratische Basispolynome

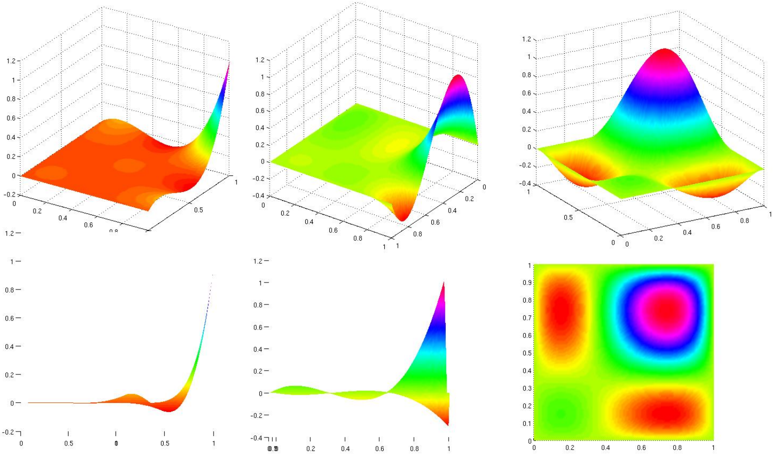


Bikubische Basispolynome

- $p(\xi,\eta) =$
  $a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2 + a_6\xi\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi^2\eta^2 + a_9\xi^3 + a_{10}\eta^3 + a_{11}\xi^3\eta + a_{12}\xi\eta^3 + a_{13}\xi^3\eta^2 + a_{14}\xi^2\eta^3 + a_{15}\xi^3\eta^3$
- Konvergenzordnung: 3 bzgl. $||.||_{H^1}$ und $||.||_{L^\infty}$; 4 bzgl. $||.||_{L^2}$



Bikubische Basispolynome



Bemerkungen

- Aus den Basispolynomen muss die Nodalbasis $\{\Phi_i\}$ sinnvoll „zusammengebaut“ werden.

Bemerkungen

- Aus den Basispolynomen muss die Nodalbasis $\{\Phi_i\}$ sinnvoll „zusammengebaut“ werden.
- Da für höhere Polynomgrade immer mehr Stützpunkte benötigt werden, wird die Steifigkeitsmatrix schnell sehr groß und immer stärker besetzt (s.u.).

Bemerkungen

- Aus den Basispolynomen muss die Nodalbasis $\{\Phi_i\}$ sinnvoll „zusammengebaut“ werden.
- Da für höhere Polynomgrade immer mehr Stützpunkte benötigt werden, wird die Steifigkeitsmatrix schnell sehr groß und immer stärker besetzt (s.u.).
- Die verwendete FEM-Methode ist dem gegebenen Problem anzupassen.

Bemerkungen

- Aus den Basispolynomen muss die Nodalbasis $\{\Phi_i\}$ sinnvoll „zusammengebaut“ werden.
- Da für höhere Polynomgrade immer mehr Stützpunkte benötigt werden, wird die Steifigkeitsmatrix schnell sehr groß und immer stärker besetzt (s.u.).
- Die verwendete FEM-Methode ist dem gegebenen Problem anzupassen.

Test mit Deal.ii

Das Programm Laplace Variations wurde so abgeändert, dass man den Polynomgrad variieren kann und Laufzeiten sowie Matrixstrukturen angezeigt werden. Es wurden Basispolynome vom Grad 1 bis 5 verwendet.

Test mit Deal.ii

Das Programm Laplace Variations wurde so abgeändert, dass man den Polynomgrad variieren kann und Laufzeiten sowie Matrixstrukturen angezeigt werden. Es wurden Basispolynome vom Grad 1 bis 5 verwendet.Testgleichung in $\Omega := (-1,1)^2$:

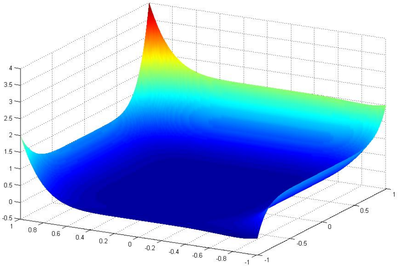
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 42x^5 + 30x^4 + 30y^4 + 30x^4y^5 + 20x^6y^3 \\ u|_{\partial\Omega} &= x^7 + x^6 + y^6 + x^6y^5. \end{aligned}$$

Test mit Deal.ii

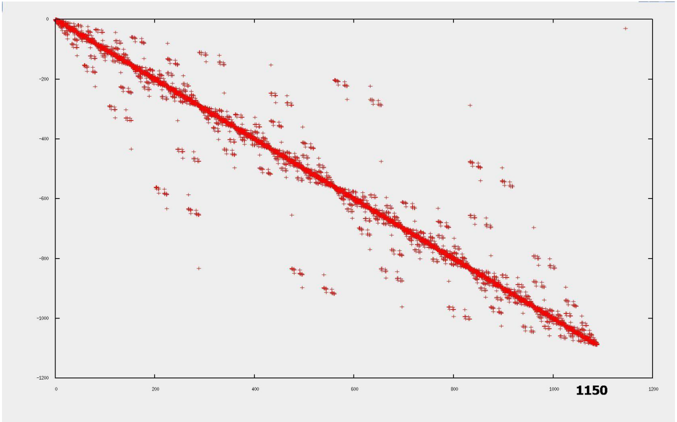
Das Programm Laplace Variations wurde so abgeändert, dass man den Polynomgrad variieren kann und Laufzeiten sowie Matrixstrukturen angezeigt werden. Es wurden Basispolynome vom Grad 1 bis 5 verwendet.Testgleichung in $\Omega := (-1,1)^2$:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 42x^5 + 30x^4 + 30y^4 + 30x^4y^5 + 20x^6y^3 \\ u|_{\partial\Omega} &= x^7 + x^6 + y^6 + x^6y^5. \end{aligned}$$

Analytische Lösung: $x^7 + x^6 + y^6 + x^6y^5$.

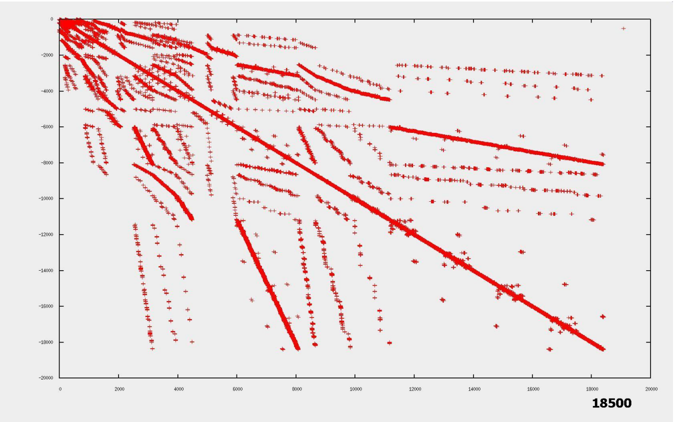


Matrixstrukturen
Lineare Finite Elemente



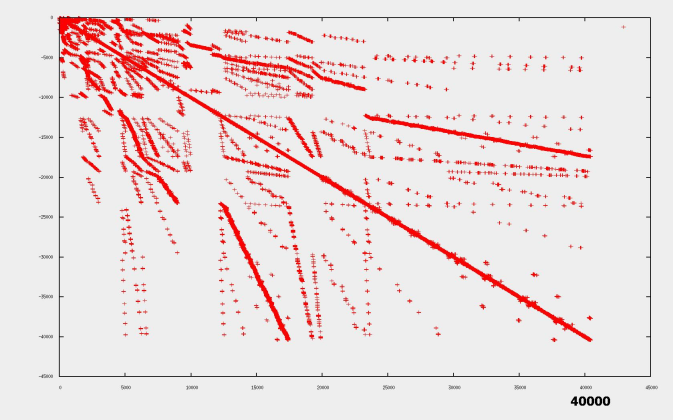
Laufzeit: 3,3s und $\|u_h - u\|_\infty = 1,6 \cdot 10^{-3}$ bei 5 Verfeinerungen.

Matrixstrukturen
Quadratische Finite Elemente



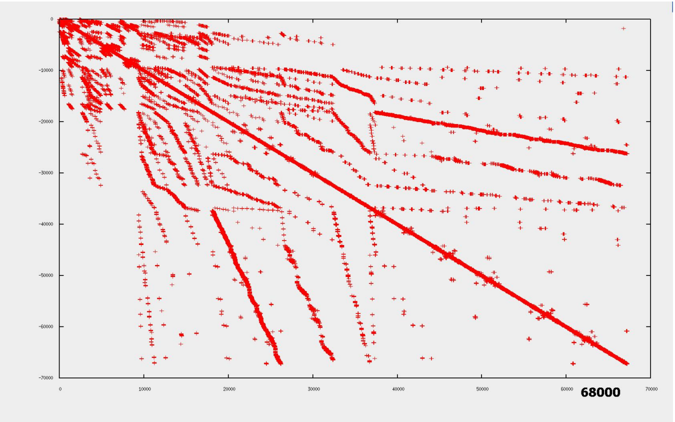
Laufzeit: 18,3s und $\|u_h - u\|_\infty = 7,7 \cdot 10^{-6}$ bei 5 Verfeinerungen.

Matrixstrukturen
Kubische Finite Elemente



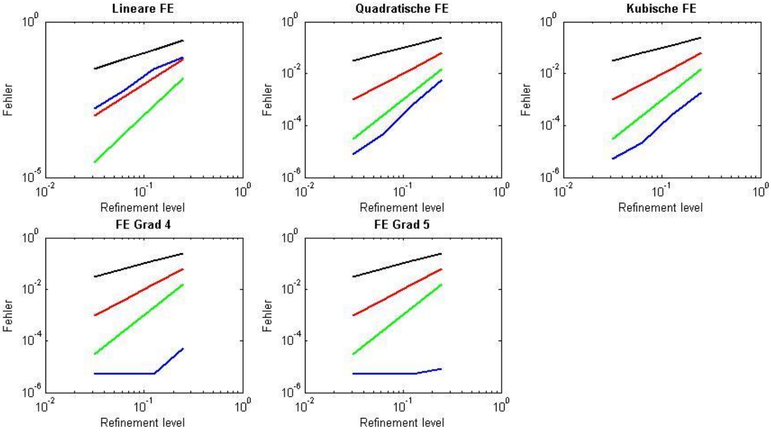
Laufzeit: 71,0s und $\|u_h - u\|_\infty = 5 \cdot 10^{-6}$ bei 5 Verfeinerungen.

Matrixstrukturen
Finite Elemente - Grad 4



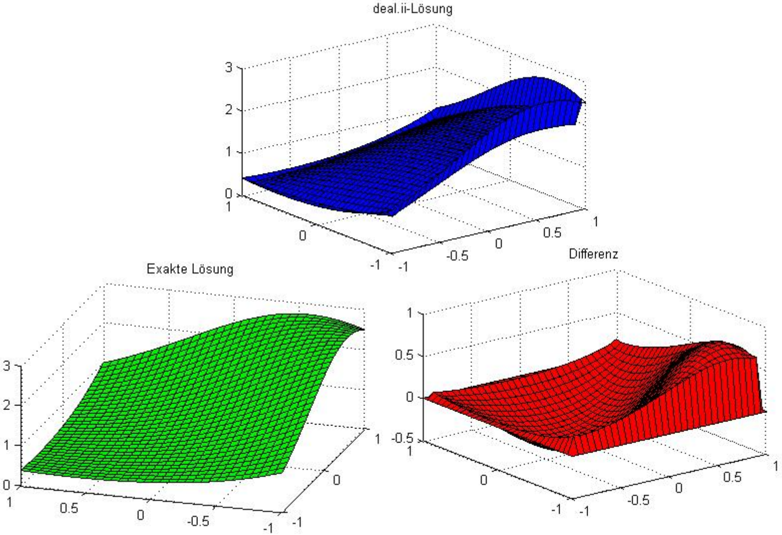
Laufzeit: 201,1s und $\|u_h - u\|_\infty = 5 \cdot 10^{-6}$ bei 5 Verfeinerungen.

Konvergenzordnung



Problem liegt wahrscheinlich in der Quadraturformel

Einfluss der Quadraturformel



Fragen ???

Fragen ???

Danke für's Zuhören!