# Behandlung inhomogener Dirichlet-Randbedingungen

Hubertus Bromberger, Manuel Nesensohn, Johannes Reinhardt, Johannes Schnur

15. November 2007

# Analytische Vorüberlegungen

Sei $L$ linearer Differentialoperator, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} Lu &= f \\ u|_{\partial\Omega} &= g \end{aligned}$$

# Analytische Vorüberlegungen

Sei $L$ linearer Differentialoperator, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet,
$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Betrachte das Problem

$$
\begin{aligned}
Lu &= f \\
u|_{\partial\Omega} &= g
\end{aligned}
$$

Zur Rückführung auf den Fall mit homogenen Randbedingungen wähle eine hinreichend glatte Funktion $w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $w|_{\partial\Omega} = g$ und definiere $u := \tilde{u} + w$, $\tilde{u}$ Lösung von

$$
\begin{aligned}
L\tilde{u} &= f - Lw \\
\tilde{u}|_{\partial\Omega} &= 0
\end{aligned}
$$

# Analytische Vorüberlegungen

Sei $L$ linearer Differentialoperator, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet,
$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Betrachte das Problem

$$\begin{aligned} Lu &= f \\ u|_{\partial\Omega} &= g \end{aligned}$$

Zur Rückführung auf den Fall mit homogenen Randbedingungen wähle eine hinreichend glatte Funktion $w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $w|_{\partial\Omega} = g$ und definiere $u := \tilde{u} + w$, $\tilde{u}$ Lösung von

$$\begin{aligned} L\tilde{u} &= f - Lw \\ \tilde{u}|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} Lu = L(\tilde{u} + w) = L\tilde{u} + Lw = f - Lw + Lw \qquad &= f \\ u|_{\partial\Omega} = \tilde{u}|_{\partial\Omega} + w|_{\partial\Omega} \qquad &= g \end{aligned}$$

# Umsetzung in der Numerik

Ein $w$ wie oben genannt kann im Allgemeinen kaum analytisch angegeben werden. Im Anwendungsfall kann die Hilfsfunktion jedoch oft sehr einfach gewählt werden. Wir betrachten das Beispiel $L = (\Delta + c), \quad c \geq 0$. Zu lösen ist also

$$\begin{aligned}(\Delta + c)\tilde{u} &= f - (\Delta + c)w \\ \tilde{u}|_{\partial\Omega} &= 0\end{aligned}$$

# Umsetzung in der Numerik

Ein $w$ wie oben genannt kann im Allgemeinen kaum analytisch angegeben werden. Im Anwendungsfall kann die Hilfsfunktion jedoch oft sehr einfach gewählt werden. Wir betrachten das Beispiel $L = (\Delta + c), \quad c \geq 0$. Zu lösen ist also

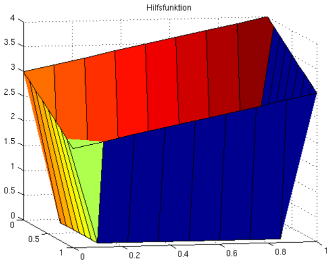
$$\begin{aligned} (\Delta + c)\tilde{u} &= f - (\Delta + c)w \\ \tilde{u}|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

und man erhält in der schwachen Formulierung

$$-\int \nabla u \nabla \varphi + \int c u \varphi = \int f \varphi + \int \nabla w \nabla \varphi - \int c w \varphi$$

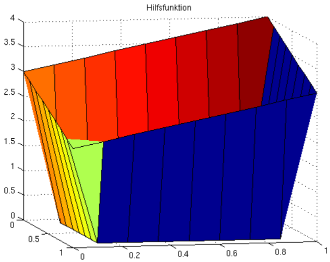
für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

# Vorgehensweise




Es ist nun also möglich $w$ nicht glatt, sondern z.B. nur stückweise linear zu wählen, etwa als Linearkombination der schon gegebenen Basisfunktionen, was den Mehraufwand gering hält. Die Vorgehensweise im Überblick:

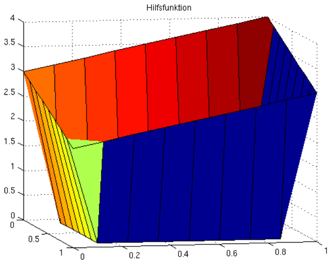
# Vorgehensweise




Es ist nun also möglich $w$ nicht glatt, sondern z.B. nur stückweise linear zu wählen, etwa als Linearkombination der schon gegebenen Basisfunktionen, was den Mehraufwand gering hält. Die Vorgehensweise im Überblick:

- Berechne Ladevektor unter Berücksichtigung der angepassten rechten Seite

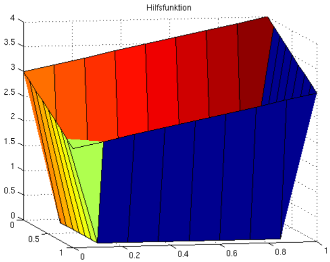
# Vorgehensweise




Es ist nun also möglich $w$ nicht glatt, sondern z.B. nur stückweise linear zu wählen, etwa als Linearkombination der schon gegebenen Basisfunktionen, was den Mehraufwand gering hält. Die Vorgehensweise im Überblick:

- Berechne Ladevektor unter Berücksichtigung der angepassten rechten Seite
- Löse das zugehörige Gleichungssystem (beachte dass die Steifigkeitsmatrix unverändert bleibt!)

# Vorgehensweise




Es ist nun also möglich $w$ nicht glatt, sondern z.B. nur stückweise linear zu wählen, etwa als Linearkombination der schon gegebenen Basisfunktionen, was den Mehraufwand gering hält. Die Vorgehensweise im Überblick:

- Berechne Ladevektor unter Berücksichtigung der angepassten rechten Seite
- Löse das zugehörige Gleichungssystem (beachte dass die Steifigkeitsmatrix unverändert bleibt!)
- Addiere $w$ zur erhalten Lösung