I. Stationäre elliptische Probleme aus der Physik

1.) Elektrodynamik

Problem: Lösung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen

Φ : elektrisches Potenzial

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = f \qquad (1) \qquad \text{hyperbolisch!}$$

Ansatz:
$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(i\omega t)\, \hat{\Phi}(x,\omega)\, d\omega$$
$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(i\omega t)\, \hat{f}(x,\omega)\, d\omega$$

dabei $\hat{\Phi}, \hat{f}$ Fourier-Transformierte von Φ, f

Einsetzen in (1) liefert:

$$\Delta \int \exp(i\omega t)\, \hat{\Phi}(x,\omega)\, d\omega - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \exp(i\omega t)\, \hat{\Phi}(x,\omega)\, d\omega = \int \exp(i\omega t)\, f(x,\omega)\, d\omega$$

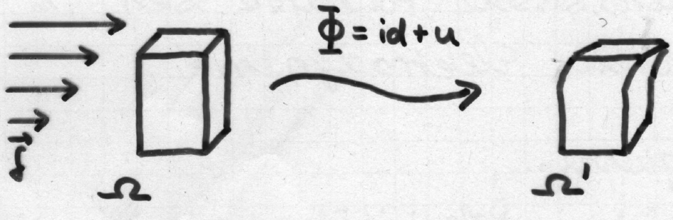
$$\Leftrightarrow \int \exp(i\omega t) \left\{ \Delta \hat{\Phi}(x,\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\Phi}(x,\omega) - \hat{f}(x,\omega) \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \hat{\Phi} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\Phi} = \hat{f} \qquad (2) \qquad \text{elliptisch!}$$

(2) heißt Helmholtz-Gleichung

2.) Elastizitätstheorie

Problem:



gesucht: Verschiebung $\vec{u}$

Verzerrungstensor $\varepsilon = \varepsilon(\vec{u})$

Spannungstensor $\sigma = \sigma(\vec{u})$

System ellipt. Dgl: $\mu \Delta \vec{u} + (\mu + \lambda)\, \text{grad div}\, \vec{u} = \vec{f}$, $\lambda, \mu = \text{const}$

II. Zeitabhängige nichtlineare Probleme aus der Strömungsdynamik

Problem: Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes $\vec{u}(x,t)$ einer Flüssigkeit im Volumen Ω

Navier-Stokes Gleichung:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}}_{=\frac{d}{dt}\vec{u}} \; - \nu\,\Delta\vec{u} \quad + \nabla p \quad = \vec{f} \quad \text{in } \Omega \qquad (3)$$

Reibungskraft   Druckkraft   äußere Kräfte

ν: Viskosität

zeitl. und räuml. Änderung von u

$\hat{=}\ \dot{p} = F$

Nebenbedingungen:

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega \qquad (4)$$

$$u = u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega \qquad (5)$$

(4) : Massenerhaltung

(5) : Anforderung an u_0 :

$$\int_{\partial\Omega} u_0 \, dS = \int_{\partial\Omega} u \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx = 0$$

NS-Gl: $\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} - \nu\Delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p = f$

1.) Rückführung auf stationäres Problem

Wählen Zeitpunkte $0 = t_0 < \ldots < t_M = T$

$k_m := t_m - t_{m-1}$

$v^m := v(\cdot, t_m)$

$p^m := p(\cdot, t_m)$

Einschritt-Θ-Schema: $\Theta \in [0,1]$

$$\frac{1}{k_m}(v^m - v^{m-1}) - \nu\Delta(\Theta v^m + (1-\Theta)v^{m-1}) + \Theta(v^m\cdot\nabla)v^m +$$

$$+ (1-\Theta)(v^{m-1}\cdot\nabla)v^{m-1} + \Theta\nabla p^m + (1-\Theta)\nabla p^{m-1} = \Theta f^m + (1-\Theta)f^{m-1}$$

$$\wedge \qquad \nabla\cdot v^m = 0$$

$\Theta = 1$: implizites Euler-Verfahren

$\Theta = \frac{1}{2}$: Crank-Nicolson

$\Theta = 0$: explizites Euler-Verfahren

$\rightsquigarrow$ quasistationäres Problem:

$$\frac{1}{k_m}v^m - \nu\Theta\Delta v^m + \Theta(v^m\cdot\nabla)v^m + \Theta\nabla p^m = \text{"bekannt"} =: \tilde{f}$$

$$\nabla\cdot v^m = 0$$

2.) Linearisierung

(i) Stokes: (bei zähen Flüssigkeiten u. kl. Geschwindigkeiten)

$$\frac{1}{k_m} v^m - \nu \Delta v^m + \nabla p^m = \tilde{f} - \underbrace{(v^{m-1} \cdot \nabla) v^{m-1}}$$

$$\nabla \cdot v^m = 0$$

(ii) Oseen:

$$\frac{1}{k_m} v^m - \nu \Delta v^m + \underbrace{(\bar{v} \cdot \nabla) v^m} + \nabla p^m = \tilde{f} \quad , \text{z.B. } \bar{v} = v^{m-1}$$

$$\nabla \cdot v^m = 0$$

(iii) Newton:

$$\frac{1}{k_m} v^m - \nu \Delta v^m + \underbrace{(v^{m-1} \cdot \nabla) v^m + (v^m \cdot \nabla) v^{m-1}} + \nabla p^m =$$

$$= \tilde{f} + \underbrace{(v^{m-1} \cdot \nabla) v^{m-1}}$$

$$\nabla v^m = 0$$