Universität Konstanz
Fakultät für Mathematik und Statistik
S. Banholzer, D. Beermann, Prof. Dr. S. Volkwein

Wintersemester 2017/2018

Übungen zu
POD für linear-quadratische Optimalsteuerung

http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/beermann/teaching

Blatt 3

Abgabe: Dienstag, 5. Dezember in der Vorlesung

Aufgabe 3.1 (Programmierteil) (15 Punkte)

Sei $\emptyset \neq \Omega = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \times (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}) \subset \mathbb{R}^2$ unser Gebiet mit Rand Γ. Betrachten Sie die folgende linear-quadratische parabolische Zustandsgleichung:

$$\begin{aligned} y_t(t,x) - \kappa\Delta y(t,x) &= \sum\nolimits_{i=1}^m u_i(t)\chi_i(x), && \text{f.f.a. } (t,x) \in Q = (0,T) \times \Omega && \text{(1a)}\\ \tfrac{\partial y}{\partial n}(t,s) &= 0, && \text{f.f.a } (t,s) \in \Sigma = (0,T) \times \Gamma && \text{(1b)}\\ y(0,x) &= y_0(x), && \text{f.f.a. } x \in \Omega && \text{(1c)} \end{aligned}$$

Hierbei sind $\emptyset \neq G_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \times (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}) \subset \Omega$ Rechtecke und $\chi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ Indikatorfunktionen für dieses Gebiet, d.h. $\chi_i(x) = 1$ genau dann, wenn $x \in G_i$. Weiter ist $\kappa \in \mathbb{R}^+$ der Diffusionsparameter und $y_0 \in L^2(\Omega)$ eine Anfangsbedingung. Für die Kontrolle nehmen wir an, dass $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ gilt.

1. **Schwache Formulierung:**
   Formulieren Sie (1) auf ihre präferierte Art und Weise in der kanonischen schwachen Formulierung unter Verwendung der Räume $H = L^2(\Omega)$ und $V = H^1(\Omega)$.

2. **Semidiskretisierung:**
   Ausgehend von einem Finite-Elemente-Teilraum $V^n = \text{span}\,\{\phi_1, ..., \phi_n\} \subset V$, führen Sie einen kanonischen Galerkin-Ansatz durch, um ihre schwache Formulierung aus 1. in eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned} My_t^n(t) + Ay^n(t) &= Bu(t), && \text{in } \mathbb{R}^n, \text{f.f.a. } t \in (0,T) && \text{(2a)}\\ y^n(0) &= y_0^n, && \text{in } \mathbb{R}^n && \text{(2b)} \end{aligned}$$

   zu transformieren.

3. **Assemblierung:**
   Schreiben Sie eine Methode, welche die Matrizen $M, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ assembliert. Verwenden Sie hierfür in Matlab die PDE Toolbox und in Python das FEniCS-Paket. Nützliche Links, die in diesem Kontext helfen könnten, sind für Matlab:

   - `http://de.mathworks.com/help/pde/ug/solve-problems-using-pdemodel-objects.html`
   - `http://de.mathworks.com/help/pde/ug/three-ways-to-create-2-d-geometry.html`
   - `http://de.mathworks.com/help/pde/ug/f-coefficient-for-specifycoefficients.html`
   - `https://de.mathworks.com/help/pde/ug/assema.html` (ignore the 'not recommended' part, this still works fine.)

   Für FEniCS empfehlen wir das offizielle Tutorial: `https://fenicsproject.org/pub/tutorial/pdf/fenics-tutorial-vol1.pdf`. Folgende Abschnitte könnten hilfreich sein:

   - 2.1 bis 2.3: Zum Kennenlernen
   - 2.4: Der Teil über die `p`-Funktion für unsere χ_i-Funktionen.
   - 5.3.2: Für die Assemblierung.

4. **Volldiskretisierung:**
   Schreiben Sie einen Löser, der u.a. für die Eingangsvariablen `M`, `A`, `B` und `y0` das Problem (2) mit dem impliziten Eulerverfahren löst. Schreiben Sie Ihren Code in der Erwartung, dass diese Methode später im Rahmen eines Optimalsteuerungskontexts mehrmals aufgerufen wird.

5. **Testphase:**
   Lösen Sie (1) mit den Daten

$$\kappa = 1,\ y_0 = 0,\ m = 2,\ T = 2\pi,\ \Omega = (0,1)^2,\ G_1 = (0, 0.5) \times (0,1),\ G_2 = (0.5, 1) \times (0,1)$$

   Verwenden Sie die folgende Steuerung:

$$u(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \text{für } t \in (0, 2\pi)$$

6. **Modellreduktion:**
   Berechnen Sie POD-Basen $\{\psi_1, ..., \psi_\ell\} \subset V^n$ geeigneter Länge zur Lösungstrajektorie $\{y^n(t_1), \ldots, y^n(t_{n_t})\} \subset V^n$ von (2) durch Lösen von

$$\min_{\psi_1,\ldots,\psi_\ell \in \mathbb{R}^n} \quad \sum_{k=1}^{n_t} \alpha_k \left\| y^n(t_k) - \sum_{i=1}^{\ell} \langle y^n(t_k), \psi_i \rangle_X \psi_i \right\|_X^2 \quad \text{s.t. } \langle \psi_i, \psi_j \rangle_X = \delta_{ij} \tag{3}$$

   Verwenden Sie einmal $\langle x, y \rangle_X = x^T M X$ und einmal $\langle x, y \rangle_X = x^T (M + A) y$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ als inneres Produkt. Führen Sie eine Galerkin-Projektion von (2) auf den Raum $V^\ell := \text{span } \{\psi_1, ..., \psi_\ell\}$ durch, um eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$M^\ell y_t^\ell(t) + A^\ell y^\ell(t) = B^\ell u(t), \qquad \text{in } \mathbb{R}^\ell, \text{f.f.a. } t \in (0,T) \tag{4a}$$

$$y^\ell(0) = y_0^\ell, \qquad \text{in } \mathbb{R}^\ell \tag{4b}$$

   mit $M^\ell, A^\ell \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$, $B^\ell \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ und $y_0^\ell \in \mathbb{R}^\ell$ zu erhalten. Lösen Sie auch diese mit ihrem Programm aus 4. Vergleichen Sie in einem Bericht den Fehler zwischen y^n und y^ℓ sowie zwischen ∇y^n und ∇y^ℓ. Erklären Sie, warum Sie für die verschiedenen Wahlen von X in (3) unterschiedliche Ergebnisse erhalten.

Aufgabe 3.2 (Theorie) (5 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv semidefinit und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ beliebig. Weiterhin seien $H := V := \mathbb{R}^n$ mit den inneren Produkten

$$\langle x, y \rangle_H := x^T \cdot M \cdot y,$$
$$\langle x, y \rangle_V := x^T \cdot (M + P) \cdot y$$

versehen.
Zeigen Sie, dass die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} M\dot{y}(t) + A(t)y(t) &= Bu(t) \quad &&\text{in } \mathbb{R}^n \text{ für fast alle } t \in (0,T), \\ y(0) &= y_0 &&\text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

für beliebige $T > 0$, $A \in C([0,T]; \mathbb{R}^{n \times n})$, $u \in L^2(0,T; \mathbb{R}^m)$ und $y_0 \in H$ eine eindeutige Lösung $y \in W(0,T) := \{\phi \in L^2(0,T;V) \mid \phi_t \in L^2(0,T;V')\}$ besitzt.[1]

[1] Vgl. Theorem 1.22 im Skript