Universität Konstanz *WS 13/14*
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J.Schropp, J.Budday

Übungen zu **Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen**

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/thnumpdg.html

Blatt 8 Ausgabe: 12.12.2013 **Abgabe: 19.12.2013**

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein zusammenhängendes Gebiet mit C^1-Rand $\partial\Omega$. Es sei $D_\psi = \{u \in C(\bar{\Omega}) \mid \; u = \psi \text{ auf } \partial\Omega\}$. Wir betrachten den Differentialoperator L:

$$L : C^2(\Omega) \cap D_0 \longrightarrow C(\Omega) \quad , \quad Lu = -\Delta u\,.$$

Zeigen Sie:

i) $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$ für $u, v \in C^2(\Omega) \cap D_0$,

ii) L ist positiv definit.

Das Skalarprodukt von zwei auf Ω definierten Funktionen u und v ist gegeben durch

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega uv \,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Vorgelegt sei das lineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \text{ für alle } x \in (0,1), \\ u(0) = \alpha,\ u(1) = \beta. \end{cases} \tag{1}$$

wobei b, c, f stetige Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ mit $c > 0$ und α, β reelle Zahlen sind. Diskretisieren Sie das Problem (1), indem Sie die Schrittweite $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, verwenden und indem Sie $u''(x)$ und $u'(x)$ durch die zweite Differenz beziehungsweise durch die symmetrische Differenz approximieren. Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem auf und untersuchen Sie dieses auf Lösbarkeit. Wann ist die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems zeilendiagonaldominant? Was ändert sich, wenn $u'(x)$ wie folgt approximiert wird:

$$u'(x) \approx \begin{cases} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \text{ falls } b(x) < 0, \\ \frac{u(x)-u(x-h)}{h} \text{ falls } b(x) \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Hinweis: Die $n \times n$ Matrix $A = (a_{ik})_{i=1\ldots n, k=1\ldots n}$ heißt *zeilendiagonaldominant*, falls gilt

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{ik}| \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

(vgl. Skript Numerik I, Seite 16).

Bemerkung: Die Differenzenapproximation (2) heißt Aufwind-Differenzenquotient. Diese Technik ist insbesondere bei singulär gestörten Problemen sehr hilfreich.

Aufgabe 3 (Theorie) (6 Punkte)

Es sei A^h die Matrix des klassischen Differenzenverfahrens mit Schrittweite $h = 1/M$ zur Randwertaufgabe $-\Delta u = g$ in $\Omega =]0, 1[^2$, $u = \gamma$ auf $\partial\Omega$. Weisen Sie nach, dass die Vektoren $u^{kl} \in \mathbb{R}^{\Omega_h}$, $h = 1/M$,

$$(u^{kl})_{ij} \quad = \quad \sin\left(\frac{ik\pi}{M}\right) \, \sin\left(\frac{jl\pi}{M}\right), \quad 1 \leq i, j \leq M - 1$$

Eigenvektoren von A^h sind. Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte λ_{kl}?

allgemeine Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Abgabe der Programme per Email an den jeweiligen Tutor bis spätestens 12 Uhr am Abgabetag.
- In den Programmen muss jeder Schritt angemessen kommentiert sein und erklärt werden können.
- Abgabe der Theorieaufgaben in den entsprechenden Briefkasten vor F441 bis spätestens 12 Uhr am Abgabetag.