

## ÜBUNGEN ZU Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

<http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/thnumpdg.html>

**Blatt 9**                      Ausgabe: 19.12.2013                      **Abgabe: 13.01.2014**

**Aufgabe 1** (Theorie) (4 Punkte)

Zu  $\epsilon > 0$ ,  $e \in \mathbb{R}^N$  wird durch

$$\|u\|_e = \max \left\{ \frac{|u_i|}{e_i}; i = 1, \dots, N \right\}$$

eine gewichtete Maximumsnorm auf  $\mathbb{R}^N$  erklärt. Es sei nun  $P \in \mathbb{R}^{N,N}$ . Zeigen Sie: Mit der  $\|\cdot\|_e$  zugeordneten Matrixnorm gilt

$$\|P\|_e = \|Pe\|_e, \text{ falls } P \geq 0.$$

**Aufgabe 2** (Theorie) (6 Punkte)

Es sei  $A \in \mathbb{R}^{N,N}$  eine  $L_0$ -Matrix. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

- $A$  ist  $M$ -Matrix
- Es existiert ein  $e \in \mathbb{R}^N$ ,  $e > 0$  mit  $Ae > 0$

Hinweis: Zerlege  $A = D - B$ ,  $D = \text{diag}(A_{11}, \dots, A_{NN})$  und verwende für  $P = D^{-1}B$  die Neumannsche Reihe.

**Aufgabe 3** (Programmieraufgabe) (8 Punkte)

Es sei  $\Omega = ]0, 1]^2$  und  $h = \frac{1}{M}$  mit  $M \in \mathbb{N}$ . Lösen Sie numerisch die Aufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) &= g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

mit dem klassischen Differenzenverfahren. Verwenden Sie die natürliche, zeilenweise von links unten nach rechts oben verlaufende Nummerierung der Gitterpunkte in  $\Omega$ . Benutzen Sie die folgenden Funktionen  $f$  und  $g$ :

a)  $f(x, y) = 4\pi \sin(2\pi x)(\pi \cos(2\pi y^2)(1 + 4y^2) + \sin(2\pi y^2)),$   
 $g(x, y) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi y^2).$

b)  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |x - 0.5| + |y - 0.5| \leq 0.2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases},$   
 $g(x, y) = 0.$

$$c) \begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ g(x, y) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } |x| \leq 0.5, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass im Fall a)  $u(x, y) = g(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega$  gilt, und benutzen Sie dies um Ihr Programm auf Korrektheit zu überprüfen. Visualisieren Sie die rechte Seite  $f(x, y)$  und die Lösung  $u(x, y)$ . Probieren Sie verschiedene Werte für  $M$  aus. Dokumentieren Sie Ihre Beobachtungen!

Achten Sie auf folgende Punkte bei der Implementierung

- Korrektheit,
- Logik,
- Dokumentation.

*Bemerkung:* Bei der MATLAB Implementierung können folgende Befehle hilfreich sein: `ndgrid`, `mesh`, `spdiags`, `sparse`.

### **allgemeine Hinweise zur Abgabe:**

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Abgabe der Programme per Email an den jeweiligen Tutor bis spätestens 12 Uhr am Abgabetag.
- In den Programmen muss jeder Schritt angemessen kommentiert sein und erklärt werden können.
- Abgabe der Theorieaufgaben in den entsprechenden Briefkasten vor F441 bis spätestens 12 Uhr am Abgabetag.