Universität Konstanz *WS 13/14*
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J.Schropp, J.Budday

ÜBUNGEN ZU **Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen**

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/thnumpdg.html

Blatt 11 Ausgabe: 20.01.2014 **Abgabe: 27.01.2014**

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Gegeben sei die Aufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta v &= \lambda v \text{ in } \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$ sei. Eine Lösung $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), v \neq 0$ heißt Eigenfunktion zum Eigenwert λ.
a) Zeigen Sie: Für jeden Eigenwert λ von (1) gilt $\lambda > 0$.
b) Seien v_1, v_2 Eigenfunktionen zu Eigenwerten λ_1 und λ_2 mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Zeigen Sie: In diesem Fall sind v_1, v_2 orthogonal bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle u, w \rangle = \int_\Omega u(x)w(x)dx.$$

c) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von (1) explizit im Fall $\Omega =]0,1[^2$ und vergleichen Sie diese mit denen von Aufgabe 3 auf Blatt 8.

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Vorgelegt sei das Problem

$$-\Delta u = 1 \quad \text{auf } \Omega =]0,1[^2 \quad , \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2}$$

Machen Sie einen Ritz-Ansatz für (2) mit den Ansatzfunktionen

$$u^{k,l}(x,y) = \sin(k\pi x)\sin(l\pi y) \quad , \quad (x,y) \in \Omega \quad , \quad l = 1,\ldots,\hat{l}\ ,\ k = 1,\ldots,\hat{k}.$$

Welche Lösung ergibt sich für das Ritz-Verfahren?

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe) (8 Punkte)

Vorgelegt sei die Aufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \frac{1}{10}(x^2 + y^2) \text{ in } \Omega, \\ u|_{\Gamma_1} &= 1, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei wie folgt definiert:

$$\Omega = \Big(\big((-8,8) \times (-2,2) \big) \cup K_6\big((0,0)\big) \Big) \setminus \Big(\bar{K}_2\big((0,a)\big) \cup \bar{K}_2\big((-a,-b)\big) \cup \bar{K}_2\big((a,-b)\big) \Big)$$

mit $a = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $b = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. $K_\varepsilon\big((x,y)\big)$ und $\bar{K}_\varepsilon\big((x,y)\big)$ bezeichnen hierbei den offenen bzw. abgeschlossenen Kreis um den Punkt (x,y) mit dem Radius $\varepsilon > 0$.
Für den Rand $\partial\Omega$ gelte $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ mit

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \partial\Big(\big((-8,8) \times (-2,2) \big) \cup K_6\big((0,0)\big) \Big), \\ \Gamma_2 &= \partial\Big(\bar{K}_2\big((0,a)\big) \cup \bar{K}_2\big((-a,-b)\big) \cup \bar{K}_2\big((a,-b)\big) \Big). \end{aligned}$$

Lösen Sie (3) mit der Finiten Elemente Methode aus **MATLAB** auf dem Gebiet Ω. Benutzen Sie dabei die Funktion **pdetool** aus **MATLAB** und führen Sie die Schritte **Draw, Boundary, PDE, Mesh** und **Solve** durch. Zeichnen Sie dann die Lösung inklusive Gitter und geben Sie diese aus.

allgemeine Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Abgabe der Programme per Email an den jeweiligen Tutor bis spätestens 12 Uhr am Abgabetag.
- In den Programmen muss jeder Schritt angemessen kommentiert sein und erklärt werden können.
- Abgabe der Theorieaufgaben in den entsprechenden Briefkasten vor F441 bis spätestens 12 Uhr am Abgabetag.