Universität Konstanz *WS 13/14*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J.Schropp, J.Budday

Übungen zu **Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen**

http://www.math.uni-konstanz.de/~budday/lehre/WS1314/NPDE/index.php

Blatt 12 Ausgabe: 27.01.2014 **Abgabe: 03.02.2014**

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

Beweisen Sie das Lemma von Aubin-Nitsche in der folgenden Form: Besitzt das duale Problem

$$a(v,z) = b(v) = \int_\Omega g \cdot v \, dx \quad \forall v \in V$$

für $g \in L^2(\Omega)$ eine Lösung $z \in H^2(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \|z\|_2 := \|z\|_{H^2} &\leq C_1 \, \|g\|_0 \quad \text{für ein } C_1 > 0 \text{ und} \\ \min_{w \in V_h} \|z - w\|_1 &\leq C_2 \, h \, \|D^2 z\|_0 \quad \text{für ein } C_2 > 0, \text{ wobei} \end{aligned}$$

$$\|D^2 z\|_0 := \Big(\sum_{|\alpha|=2} \int_\Omega |\partial^\alpha z|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} ,$$

so gilt

$$\|\overline{u} - u_h\|_0 \leq C \, h \, \|\overline{u} - u_h\|_1 \quad \text{für ein } C > 0.$$

Aufgabe 2 (Theorie) (6 Punkte)

Es bezeichne

$$\dot{v}(t) = F_{\Delta x}(v(t), t) \tag{1}$$

das Liniensystem aus der Vorlesung zu

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - ku + r, \quad 0 \leq x \leq 1, \ t \geq 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) &= \gamma_0, \quad u(1,t) = \gamma_1, \quad t \geq 0, \ k > 0 \end{aligned}$$

mit den Kompatibilitätsbedingungen $u_0(i) = \gamma_i$, $i = 0, 1$. Die Näherungsvektoren v^j auf der Zeitstufe $t_j = j\Delta t$ seien erzeugt durch Anwenden des impliziten Euler-Cauchy Verfahrens auf (1). Zeigen Sie $v^j \to \bar{v}$ für $j \to \infty$, wobei $\bar{v}$ die Lösung des klassischen Differenzenverfahrens zu

$$\begin{aligned} -v'' + kv &= r \quad \text{in} \quad [0,1], \\ v(0) &= \gamma_0, \quad v(1) = \gamma_1 \end{aligned}$$

ist. (Tipp: Schreiben Sie die Iteration in Fixpunktform und wählen Sie eine geeignete Norm, um die Kontraktion zu sichern)

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe) (8 Punkte)

Vorgelegt sei die Reaktions-Transport-Gleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - ku, \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T, \\ u(x,0) &= 1 - x, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) &= 1, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{2}$$

Lösen Sie für $k = 10,\ T = 0.1$ das zu (2) gehörige Liniensystem mit dem ϑ-Verfahren für $\vartheta = 0,\ 0.5,\ 1$ zu $\Delta x = 0.05,\ 0.025$ und $\Delta t = 10^{-j}, j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Geben Sie jeweils nur die numerische Approximation für $t = 0.1$ aus. Zeichnen Sie die mit $\Delta t = 10^{-4}$ erzeugte Lösung mit **MATLAB**. Stimmen ihre Beobachtungen mit der Theorie überein?

allgemeine Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Abgabe der Programme per Email an den jeweiligen Tutor bis spätestens 12 Uhr am Abgabetag.
- In den Programmen muss jeder Schritt angemessen kommentiert sein und erklärt werden können.
- Abgabe der Theorieaufgaben in den entsprechenden Briefkasten vor F441 bis spätestens 12 Uhr am Abgabetag.