Universität Konstanz *WS 13/14*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J.Schropp, J.Budday

Übungen zu **Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen**

http://www.math.uni-konstanz.de/~budday/lehre/WS1314/NPDE/index.php

Blatt 13 Ausgabe: 03.02.2014 **Abgabe: 10.02.2014**

Aufgabe 1 (Theorie) (6 Punkte)

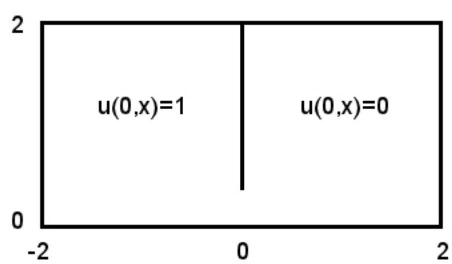
Es sei $\Omega =]-1, 1[$, und es sei $u(x) = |x|$, $x \in \Omega$. Zeigen Sie: u besitzt die schwache Ableitung

$$u'(x) \quad = \quad \begin{cases} -1, & \text{falls } -1 < x < 0, \\ 1, & \text{falls } 0 < x < 1 \end{cases}$$

und $u' \in L^2(\Omega)$. Weisen Sie überdies nach, dass u' keine schwache Ableitung besitzen kann.

Aufgabe 2 (Programmieraufgabe) (8 Punkte)

Es sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (-2, 2)\ ,\ x_2 \in (0, 2)\} \setminus \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\ ,\ x_2 \in [0.3, 2)\}$ und $D > 0$. Lösen Sie numerisch das folgende 2-dimensionale Diffusionsproblem:



$$\partial_t u(t, x) = D\Delta u(t, x)\ ,\ t > 0\ ,\ x \in \Omega$$

mit homogenen Neumannrandbedingungen $\partial_{x_1} u = 0$ bzw. $\partial_{x_2} u = 0$ auf dem Rand von Ω. Als Startwert ist für $x \in \Omega$

$$u_0(x) = \begin{cases} 1\ ,\ x_1 < 0 \\ 0\ ,\ \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Verwenden Sie zur räumlichen Diskretisierung denselben Differenzenstern wie schon im elliptischen Fall:

$$\Delta u(t, x_{ij}) = \frac{u(t, x_{i-1\ j}) + u(t, x_{i\ j-1}) - 4u(t, x_{ij}) + u(t, x_{i+1\ j}) + u(t, x_{i\ j+1})}{\Delta x^2}$$

Verwenden Sie dabei ein äquidistantes Gitter, das die Punkte $(0, 0)$ und $(0, 0.3)$ enthält und verwenden Sie beim Diskretisieren der Randbedingung $\partial_{x_1} u = 0$ auf der Trennwand zwischen den beiden Kammern Rückwärtsdifferenzen für die linke bzw. Vorwärtsdifferenzen für die rechte Kammer. Am Punkt $(0, 0.3)$ verwenden Sie eine Rückwärtsdifferenz zur Diskretisierung der Randbedingung $\partial_{x_2} u = 0$. Exemplarisch sei dies für die Diskretisierung der Vorwärtsdifferenz in x_1-Richtung für einen beliebigen Punkt auf der linken Wand $(x_1 = -2)$ illustriert:

$$\frac{u\big(t, (-2 + \Delta x, j\Delta x)\big) - u\big(t, (-2, j\Delta x)\big)}{\Delta x} = 0$$

Für die Diskretisierung in der Zeit verwenden Sie das ϑ-Verfahren aus der Vorlesung. Stellen Sie das zu lösende Gleichungssystem auf und visualisieren Sie den zeitlichen Verlauf der numerischen Lösung.

Aufgabe 3 (Theorie) (8 Punkte)

Wir beziehen uns auf Aufgabe 2:

(a) Zeigen Sie, dass die zur räumlichen Diskretisierung zugehörige Systemmatrix A nicht invertierbar ist. (Tipp: konstante Funktionen f erfüllen $\Delta f = 0$ und homogene Neumann-Randbedingungen)

(b) Zeigen Sie, dass die zum ϑ-Verfahren

$$\underbrace{(I - \vartheta \Delta t A)}_{=:\, B} u^{n+1} = \underbrace{(I + (1 - \vartheta)\Delta t A)}_{=:\, E} u^n$$

zugehörige Systemmatrix B eine M-Matrix ist. (Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass eine streng zeilendiagonaldominante L_0-Matrix mit strikt positiven Diagonaleinträgen eine M-Matrix ist)

(c) Zeigen Sie, dass $B^{-1}E \geq 0$ gilt für $\vartheta = 1$ oder für $\vartheta < 1$ und zusätzlich $\alpha \leq \frac{1}{1-\vartheta}$. (Tipp: für das Spektrum der Matrix B^{-1} gilt $\sigma(B^{-1}) \subset [\frac{1}{1+\alpha\vartheta}, 1]$, wobei $\alpha = \frac{4\Delta t D}{\Delta x^2}$. Desweiteren gilt für $\vartheta \neq 0$ die Beziehung $B^{-1}E = \frac{1}{\vartheta}B^{-1} - \frac{1-\vartheta}{\vartheta}I)$

(d) Zeigen Sie: Ist $B^{-1}E \geq 0$ und gibt es Konstanten $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq u_k^0 \leq M$, so gilt $m \leq u_k^n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Mit u_k^n sei der Wert der numerischen Lösung über dem k-ten Gitterpunkt zum Zeitpunkt $t_n = n\Delta t$ bezeichnet.

allgemeine Hinweise zur Abgabe:

- Die Programmieraufgaben können in 2er-Gruppen bearbeitet werden.
- Abgabe der Programme per Email an den jeweiligen Tutor bis spätestens 12 Uhr am Abgabetag.
- In den Programmen muss jeder Schritt angemessen kommentiert sein und erklärt werden können.
- Abgabe der Theorieaufgaben in den entsprechenden Briefkasten vor F441 bis spätestens 12 Uhr am Abgabetag.