Universität Konstanz

Mathematik I

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 11: Grenzwerte und Stetigkeit

Dr. Stefan Frei, 05.12.19

Wiederholung Grenzwert

$a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von f an der Stelle y, wenn

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

für **jede** Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $x_n \to y$.

Existiert dieser Grenzwert, so schreiben wir

$$\lim_{x\to y} f(x) = a$$

(f konvergiert gegen a für x gegen y)

Erweiterungen des Grenzwertbegriffs

- $a \in \mathbb{R}$ heißt linksseitiger Grenzwert $\lim_{x \to y^-} f(x) = a$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

für **jede** Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $x_n < y$ und $x_n \to y$.

Erweiterungen des Grenzwertbegriffs

- $a \in \mathbb{R}$ heißt linksseitiger Grenzwert $\lim_{x \to y^-} f(x) = a$, wenn
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$
für **jede** Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $x_n < y$ und $x_n \to y$.

- $a \in \mathbb{R}$ heißt rechtsseitiger Grenzwert $\lim_{x \to y^+} f(x) = a$, wenn
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$
für **jede** Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $x_n > y$ und $x_n \to y$.

Erweiterungen des Grenzwertbegriffs

- $a \in \mathbb{R}$ heißt linksseitiger Grenzwert $\lim_{x \to y^-} f(x) = a$, wenn
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$
für **jede** Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $x_n < y$ und $x_n \to y$.

- $a \in \mathbb{R}$ heißt rechtsseitiger Grenzwert $\lim_{x \to y^+} f(x) = a$, wenn
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$
für **jede** Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $x_n > y$ und $x_n \to y$.

- Uneigentliche Grenzwerte (a oder $y = \pm\infty$)
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Beispiele Uneigentliche Grenzwerte

(iii) Polynome $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \quad (a_n \neq 0)$

$$\lim_{x \to \infty} p(x)$$

Beispiele Uneigentliche Grenzwerte

(iii) Polynome $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad (a_n \neq 0)$

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^n} + \ldots + a_n \right)$$

Beispiele Uneigentliche Grenzwerte

(iii) Polynome $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad (a_n \neq 0)$

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x^n}_{\to\infty} \underbrace{\left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^n} + \ldots + a_n\right)}_{\to a_n (x\to\infty)}$$

Beispiele Uneigentliche Grenzwerte

(iii) Polynome $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad (a_n \neq 0)$

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x^n}_{\to\infty} \underbrace{\left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^n} + \ldots + a_n\right)}_{\to a_n (x\to\infty)} = \begin{cases} +\infty, & a_n > 0, \\ -\infty, & a_n < 0 \end{cases}$$

Beispiele Uneigentliche Grenzwerte

(iii) Polynome $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \quad (a_n \neq 0)$

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x^n}_{\to\infty} \underbrace{\left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^n} + \ldots + a_n\right)}_{\to a_n (x\to\infty)} = \begin{cases} +\infty, & a_n > 0, \\ -\infty, & a_n < 0 \end{cases}$$

Fazit: Die führende Ordnung $a_n x^n$ bestimmt das Konvergenzverhalten für $n \to \pm\infty$

Beispiele Uneigentliche Grenzwerte

(iv) Rationale Funktionen

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \quad (a_n, b_m \neq 0)$$

Beispiele Uneigentliche Grenzwerte

(iv) Rationale Funktionen

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \quad (a_n, b_m \neq 0)$$

- Fall 1: $m < n$:

$$\lim_{x \to \infty} r(x) =$$

Beispiele Uneigentliche Grenzwerte

(iv) Rationale Funktionen

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \quad (a_n, b_m \neq 0)$$

- Fall 1: $m < n$:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n}$$

Beispiele Uneigentliche Grenzwerte

(iv) Rationale Funktionen

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \quad (a_n, b_m \neq 0)$$

- Fall 1: $m < n$:

$$\lim_{x \to \infty} r(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n} = \frac{0}{b_n} = 0.$$

Beispiele Uneigentliche Grenzwerte

(iv) Rationale Funktionen

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \quad (a_n, b_m \neq 0)$$

- Fall 1: $m < n$:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n} = \frac{0}{b_n} = 0.$$

- Fall 2: $m = n$:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) =$$

Beispiele Uneigentliche Grenzwerte

(iv) Rationale Funktionen

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \quad (a_n, b_m \neq 0)$$

- Fall 1: $m < n$:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n} = \frac{0}{b_n} = 0.$$

- Fall 2: $m = n$:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + a_m}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n}$$

Beispiele Uneigentliche Grenzwerte

(iv) Rationale Funktionen

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \quad (a_n, b_m \neq 0)$$

- Fall 1: $m < n$:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n} = \frac{0}{b_n} = 0.$$

- Fall 2: $m = n$:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + a_m}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n} = \frac{a_m}{b_n}.$$

Beispiel (iv) Fortsetzung

(iv) Rationale Funktionen $r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n}$ $\quad (a_n, b_m \neq 0)$

- Fall 3: $m > n$:

$$\lim_{x \to \infty} r(x) =$$

Beispiel (iv) Fortsetzung

(iv) Rationale Funktionen $r(x) = \frac{a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n} \quad (a_n, b_m \neq 0)$

- Fall 3: $m > n$:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n}$$

Beispiel (iv) Fortsetzung

(iv) Rationale Funktionen $r(x) = \frac{a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n} \quad (a_n, b_m \neq 0)$

- Fall 3: $m > n$:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n}$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n\right) =$$

Beispiel (iv) Fortsetzung

(iv) Rationale Funktionen $r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \quad (a_n, b_m \neq 0)$

- Fall 3: $m > n$:

$$\lim_{x \to \infty} r(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n}$$

Es gilt

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}} \right) = \begin{cases} +\infty, & a_m > 0, \\ -\infty, & a_m < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n \right) =$$

Beispiel (iv) Fortsetzung

(iv) Rationale Funktionen $r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \quad (a_n, b_m \neq 0)$

- Fall 3: $m > n$:

$$\lim_{x \to \infty} r(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n}$$

Es gilt

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}} \right) = \begin{cases} +\infty, & a_m > 0, \\ -\infty, & a_m < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n \right) = b_n$$

Beispiel (iv) Fortsetzung

(iv) Rationale Funktionen $r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \quad (a_n, b_m \neq 0)$

- Fall 3: $m > n$:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n}$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}} \right) = \begin{cases} +\infty, & a_m > 0, \\ -\infty, & a_m < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n \right) = b_n$$

Damit

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \begin{cases} +\infty, & \\ & \end{cases}$$

Beispiel (iv) Fortsetzung

(iv) Rationale Funktionen $r(x) = \frac{a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n} \quad (a_n, b_m \neq 0)$

- Fall 3: $m > n$:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n}$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}\right) = \begin{cases} +\infty, & a_m > 0, \\ -\infty, & a_m < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n\right) = b_n$$

Damit

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \begin{cases} +\infty, & a_m, b_n > 0 \text{ oder } a_m, b_n < 0 \\ & \end{cases}$$

Beispiel (iv) Fortsetzung

(iv) Rationale Funktionen $r(x) = \frac{a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n}$ $\quad (a_n, b_m \neq 0)$

- Fall 3: $m > n$:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n}$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}\right) = \begin{cases} +\infty, & a_m > 0, \\ -\infty, & a_m < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n\right) = b_n$$

Damit

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \begin{cases} +\infty, & a_m, b_n > 0 \ \text{ oder } \ a_m, b_n < 0 \\ -\infty, & a_m < 0, b_n > 0 \ \text{ oder } \ a_m > 0, b_n < 0 \end{cases}$$

Beispiel (iv) Fortsetzung

(iv) Rationale Funktionen $r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n}$ $\quad (a_n, b_m \neq 0)$

- Fall 3: $m > n$:

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}}}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n}$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_m}{x^{n-m}} \right) = \begin{cases} +\infty, & a_m > 0, \\ -\infty, & a_m < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n \right) = b_n$$

Damit

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \begin{cases} +\infty, & a_m \cdot b_n > 0, \\ -\infty, & a_m \cdot b_n < 0. \end{cases}$$

5.2: Stetigkeit

Es sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

- f heißt stetig im Punkt $y \in D$, wenn $\lim_{x \to y} f(x)$ existiert und

$$\lim_{x \to y} f(x) \ = \ f(y) \ .$$

- f heißt stetig auf D, wenn f in jedem Punkt $y \in D$ stetig ist.

5.2: Stetigkeit

Es sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

- f heißt stetig im Punkt $y \in D$, wenn $\lim_{x \to y} f(x)$ existiert und

$$\lim_{x \to y} f(x) \; = \; f(y) \; .$$

- f heißt stetig auf D, wenn f in jedem Punkt $y \in D$ stetig ist.

Bemerkungen

- Links- und rechtsseitige Grenzwerte müssen existieren und übereinstimmen
- Anschaulich (im Fall $D = [a, b]$): Keine Sprünge im Graphen

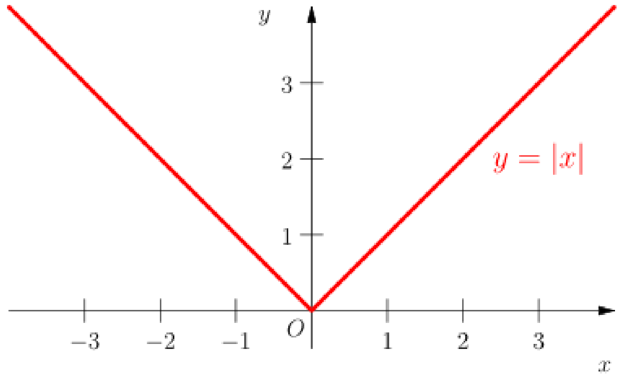
Beispiele

- Monome $f(x) = x^n$ sind stetig auf $\mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$

.

Beispiele

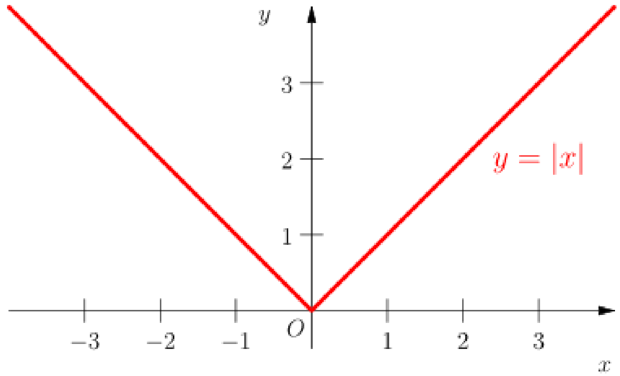
- Monome $f(x) = x^n$ sind stetig auf $\mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$
- Betragsfunktion $f(x) = |x|$



.

Beispiele

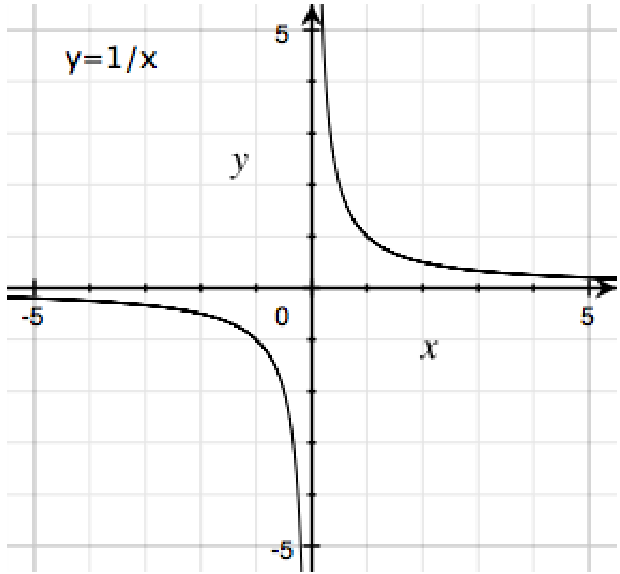
- Monome $f(x) = x^n$ sind stetig auf $\mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$
- Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.



Beispiele

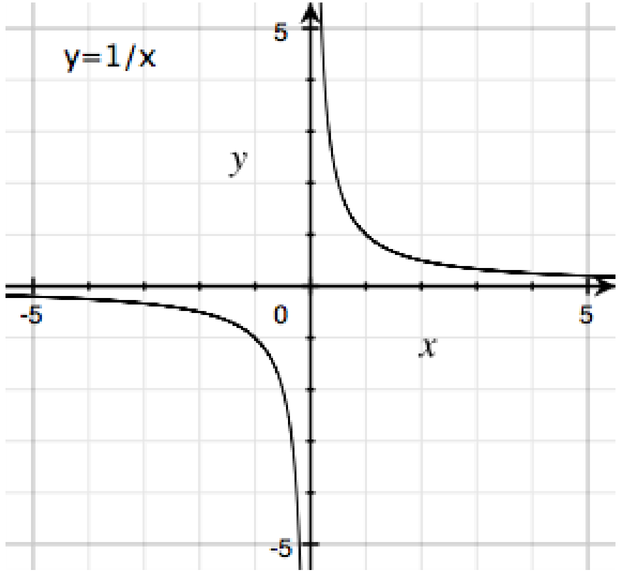
- Monome $f(x) = x^n$ sind stetig auf $\mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$
- Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.
- $f(x) = 1/x$

.



Beispiele

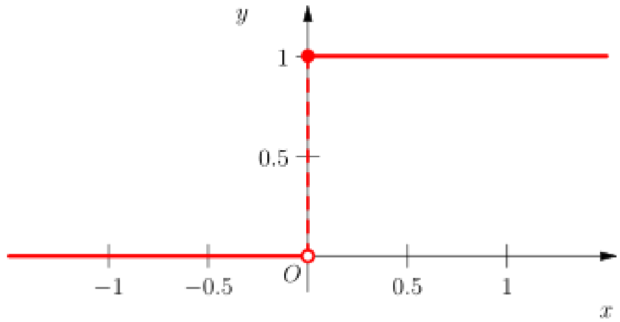
- Monome $f(x) = x^n$ sind stetig auf $\mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$
- Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.
- $f(x) = 1/x$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Definitionsbereich).



Beispiele

- Monome $f(x) = x^n$ sind stetig auf $\mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$
- Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.
- $f(x) = 1/x$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Definitionsbereich).
- Die Treppenfunktion

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



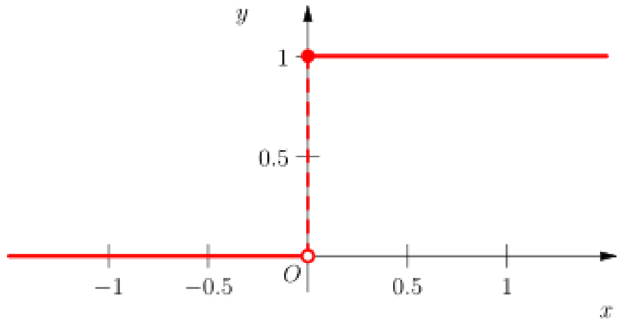
Beispiele

- Monome $f(x) = x^n$ sind stetig auf $\mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$
- Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.
- $f(x) = 1/x$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Definitionsbereich).
- Die Treppenfunktion

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

ist

  - unstetig in $x = 0$ (da $\lim_{x \to 0^-} = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+}$)

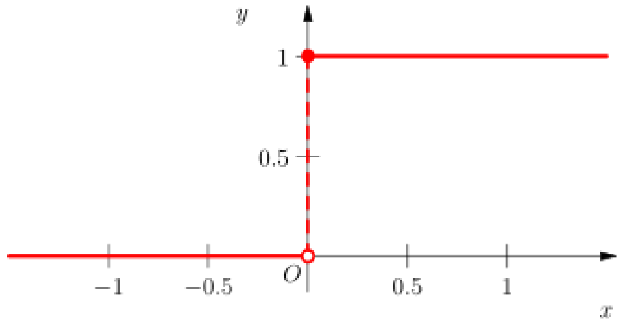


Beispiele

- Monome $f(x) = x^n$ sind stetig auf $\mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$
- Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.
- $f(x) = 1/x$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Definitionsbereich).
- Die Treppenfunktion

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

ist
  - unstetig in $x = 0$ (da $\lim_{x \to 0^-} = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+}$)
  - stetig in allen Punkten $x \neq 0$, d.h. stetig auf $\mathbb{R} \setminus 0$



Stetigkeit: Regeln

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $c \in \mathbb{R}$.

Stetigkeit: Regeln

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $c \in \mathbb{R}$.

- Ebenfalls stetig in $[a, b]$ sind dann

$$f \pm g, \quad c \cdot f, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \text{ (hier sei } g(x) \neq 0 \text{ in } [a, b]).$$

Stetigkeit: Regeln

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $c \in \mathbb{R}$.

- Ebenfalls stetig in $[a, b]$ sind dann

$$f \pm g, \quad c \cdot f, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \text{ (hier sei } g(x) \neq 0 \text{ in } [a, b]).$$

- Daraus folgt, dass Polynome stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind, ebenso rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich.

Stetigkeit: Regeln

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $c \in \mathbb{R}$.

- Ebenfalls stetig in $[a, b]$ sind dann

$$f \pm g, \quad c \cdot f, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \ \text{(hier sei } g(x) \neq 0 \text{ in } [a, b]\text{)}.$$

- Daraus folgt, dass Polynome stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind, ebenso rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich.

- Seien $f : [a, b] \to [c, d]$ und $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Verkettung $g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auch stetig.

Stetigkeit: Regeln

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $c \in \mathbb{R}$.

- Ebenfalls stetig in $[a, b]$ sind dann

$$f \pm g, \quad c \cdot f, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \text{ (hier sei } g(x) \neq 0 \text{ in } [a, b]).$$

- Daraus folgt, dass Polynome stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind, ebenso rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich.

- Seien $f : [a, b] \to [c, d]$ und $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Verkettung $g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auch stetig.

- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls stetig.

Stetigkeit: Regeln

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $c \in \mathbb{R}$.

- Ebenfalls stetig in $[a, b]$ sind dann

$$f \pm g, \quad c \cdot f, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \quad (\text{hier sei } g(x) \neq 0 \text{ in } [a, b]).$$

- Daraus folgt, dass Polynome stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind, ebenso rationale Funktionen auf ihrem Definitionsbereich.
- Seien $f : [a, b] \to [c, d]$ und $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Verkettung $g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auch stetig.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls stetig. Daraus folgen z.B. die Stetigkeit der Wurzelfunktionen.

Wachstums- und Zerfallprozesse

Sie $f(t)$ eine Population (Menschen, Tiere, Bakterien) oder Konzentration eines Stoffes zum Zeitpunkt t

Oft ist die Änderungsrate von f in einem Zeitintervall $[t, t + \delta t]$ proportional zur Population f selbst

Wachstums- und Zerfallprozesse

Sie $f(t)$ eine Population (Menschen, Tiere, Bakterien) oder Konzentration eines Stoffes zum Zeitpunkt t

Oft ist die Änderungsrate von f in einem Zeitintervall $[t, t + \delta t]$ proportional zur Population f selbst

- Änderung pro Zeiteinheit:

$$\frac{f(t + \delta t) - f(t)}{\delta t} = \lambda f(t) \tag{1}$$

- $\lambda > 0$ Wachstumsrate (z.B. Geburtenrate), $\lambda < 0$ Zerfallsrate (oder Sterberate)

Wachstums- und Zerfallprozesse

Sie $f(t)$ eine Population (Menschen, Tiere, Bakterien) oder Konzentration eines Stoffes zum Zeitpunkt t

Oft ist die Änderungsrate von f in einem Zeitintervall $[t, t + \delta t]$ proportional zur Population f selbst

- Änderung pro Zeiteinheit:

$$\frac{f(t + \delta t) - f(t)}{\delta t} = \lambda f(t) \qquad (1)$$

- $\lambda > 0$ Wachstumsrate (z.B. Geburtenrate), $\lambda < 0$ Zerfallsrate (oder Sterberate)
- Das Modell (1) ist in der Regel nur gut für kleines δt.

Frage: Wie entwickelt sich $f(t)$ bei einer Anfangspopulation $f(0)$ für $\delta t \to 0$?

Wachstumsmodell Fortsetzung I

$$\frac{f(t+\delta t)-f(t)}{\delta t}=\lambda f(t)$$

- Anfangspopulation $f(0)$ gegeben
- $f(\delta t)-f(0)=$

Wachstumsmodell Fortsetzung I

$$\frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t} = \lambda f(t)$$

- Anfangspopulation $f(0)$ gegeben
- $f(\delta t) - f(0) = \delta t \, \lambda f(0) \qquad \Rightarrow$

Wachstumsmodell Fortsetzung I

$$\frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t} = \lambda f(t)$$

- Anfangspopulation $f(0)$ gegeben
- $f(\delta t) - f(0) = \delta t\, \lambda f(0) \qquad \Rightarrow f(\delta t) = (1 + \delta t\, \lambda) f(0)$

Wachstumsmodell Fortsetzung I

$$\frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t} = \lambda f(t)$$

- Anfangspopulation $f(0)$ gegeben
- $f(\delta t) - f(0) = \delta t\, \lambda f(0) \qquad \Rightarrow f(\delta t) = (1 + \delta t\, \lambda) f(0)$
- $f(2\delta t) - f(\delta t) = \delta t\, \lambda f(\delta t) \qquad \Rightarrow f(2\delta t) = (1 + \delta t\, \lambda) f(\delta t)$

Wachstumsmodell Fortsetzung I

$$\frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t} = \lambda f(t)$$

- Anfangspopulation $f(0)$ gegeben
- $f(\delta t) - f(0) = \delta t\, \lambda f(0) \qquad \Rightarrow f(\delta t) = (1 + \delta t\, \lambda) f(0)$
- $f(2\delta t) - f(\delta t) = \delta t\, \lambda f(\delta t) \qquad \Rightarrow f(2\delta t) = (1 + \delta t\, \lambda) f(\delta t) \ = (1 + \delta t\, \lambda)^2 f(0)$

Wachstumsmodell Fortsetzung I

$$\frac{f(t+\delta t)-f(t)}{\delta t}=\lambda f(t)$$

- Anfangspopulation $f(0)$ gegeben
- $f(\delta t)-f(0)=\delta t\,\lambda f(0) \qquad \Rightarrow f(\delta t)=(1+\delta t\,\lambda)f(0)$
- $f(2\delta t)-f(\delta t)=\delta t\,\lambda f(\delta t) \qquad \Rightarrow f(2\delta t)=(1+\delta t\,\lambda)f(\delta t) \;=(1+\delta t\,\lambda)^2 f(0)$

  $\vdots$
- Zum Zeitpunkt $t=n\,\delta t$: $\quad f(t)=f(n\delta t)=(1+\delta t\,\lambda)^n f(0)$

Wachstumsmodell Fortsetzung I

$$\frac{f(t+\delta t) - f(t)}{\delta t} = \lambda f(t)$$

- Anfangspopulation $f(0)$ gegeben
- $f(\delta t) - f(0) = \delta t\, \lambda f(0) \qquad \Rightarrow f(\delta t) = (1 + \delta t\, \lambda) f(0)$
- $f(2\delta t) - f(\delta t) = \delta t\, \lambda f(\delta t) \qquad \Rightarrow f(2\delta t) = (1 + \delta t\, \lambda) f(\delta t) = (1 + \delta t\, \lambda)^2 f(0)$

  $\vdots$
- Zum Zeitpunkt $t = n\,\delta t$: $\quad f(t) = f(n\delta t) = (1 + \delta t\, \lambda)^n f(0) = (1 + \frac{t}{n}\lambda)^n f(0)$

Wachstumsmodell Fortsetzung II

Zum Zeitpunkt $t = n\,\delta t$ gilt

$$f(t) = f(n\delta t) = (1 + \frac{t}{n}\lambda)^n f(0)$$

Wachstumsmodell Fortsetzung II

Zum Zeitpunkt $t = n\,\delta t$ gilt

$$f(t) = f(n\delta t) = (1 + \frac{t}{n}\lambda)^n f(0)$$

Grenzwert $\delta t \to 0$ (entspricht $n = \frac{t}{\delta t} \to \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n f(0) =$$

Wachstumsmodell Fortsetzung II

Zum Zeitpunkt $t = n\,\delta t$ gilt

$$f(t) = f(n\delta t) = (1 + \frac{t}{n}\lambda)^n f(0)$$

Grenzwert $\delta t \to 0$ (entspricht $n = \frac{t}{\delta t} \to \infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n f(0) = \exp(\lambda t) f(0).$$

Wachstumsmodell Fortsetzung II

Zum Zeitpunkt $t = n\,\delta t$ gilt

$$f(t) = f(n\delta t) = (1 + \frac{t}{n}\lambda)^n f(0)$$

Grenzwert $\delta t \to 0$ (entspricht $n = \frac{t}{\delta t} \to \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n f(0) = \exp(\lambda t) f(0).$$

Lösung: $f(t) = \exp(\lambda t) f(0)$

Wachstumsmodell Fortsetzung II

Zum Zeitpunkt $t = n\delta t$ gilt

$$f(t) = f(n\delta t) = (1 + \frac{t}{n}\lambda)^n f(0)$$

Grenzwert $\delta t \to 0$ (entspricht $n = \frac{t}{\delta t} \to \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n f(0) = \exp(\lambda t) f(0).$$

Lösung: $f(t) = \exp(\lambda t) f(0)$

- $\lambda > 0$: Population wächst über alle Grenzen ($f(t) \to \infty$ für $t \to \infty$)

Wachstumsmodell Fortsetzung II

Zum Zeitpunkt $t = n\,\delta t$ gilt

$$f(t) = f(n\delta t) = (1 + \frac{t}{n}\lambda)^n f(0)$$

Grenzwert $\delta t \to 0$ (entspricht $n = \frac{t}{\delta t} \to \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n f(0) = \exp(\lambda t) f(0).$$

Lösung: $f(t) = \exp(\lambda t) f(0)$

- $\lambda > 0$: Population wächst über alle Grenzen ($f(t) \to \infty$ für $t \to \infty$)
- In der Realität bestehen meist Beschränkungen (z.B. Nahrung, Lebensraum): Logistisches Wachstumsmodell evtl. realistischer

$$f(t) = \frac{a}{1 + \exp(b - ct)}, \qquad a, b \in \mathbb{R}_+, c \in \mathbb{R}$$