Universität Konstanz

Mathematik I

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 12: Logarithmus und Trigonometrische Funktionen

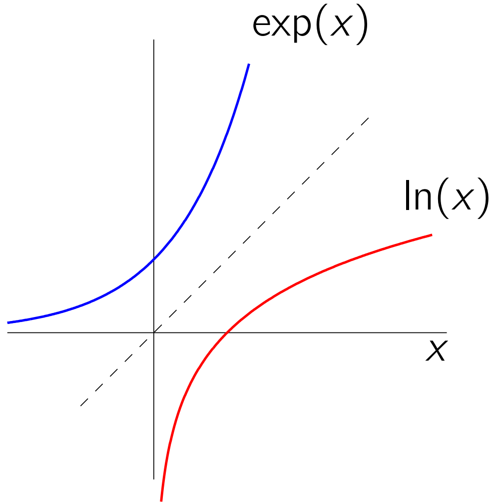
Dr. Stefan Frei, 12.12.19

Exponentialfunktion und Logarithmus

- $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty), \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\exp$ ist streng monoton wachsend (smw)
  $\Rightarrow$ umkehrbar

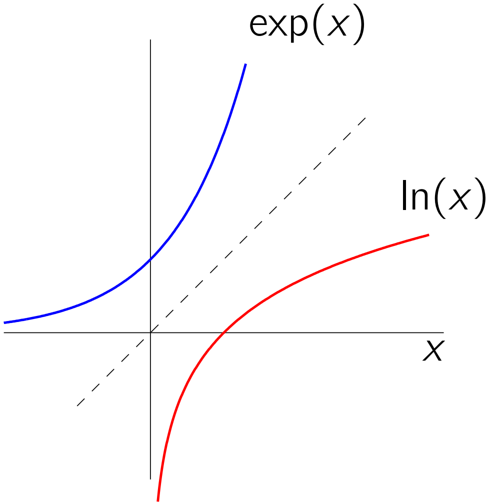
Exponentialfunktion und Logarithmus

- $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- exp ist streng monoton wachsend (smw)
  $\Rightarrow$ umkehrbar
- $\ln = \exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$



Exponentialfunktion und Logarithmus

- $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- exp ist streng monoton wachsend (smw)
  $\Rightarrow$ umkehrbar
- $\ln = \exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

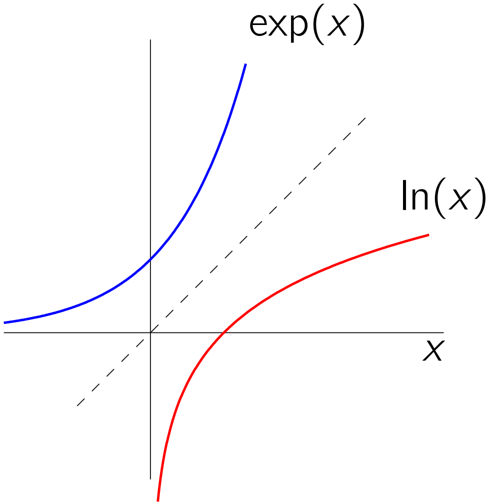


Funktionswerte & Eigenschaften

- $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$
- $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$

Exponentialfunktion und Logarithmus

- $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- exp ist streng monoton wachsend (smw)
  $\Rightarrow$ umkehrbar
- $\ln = \exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

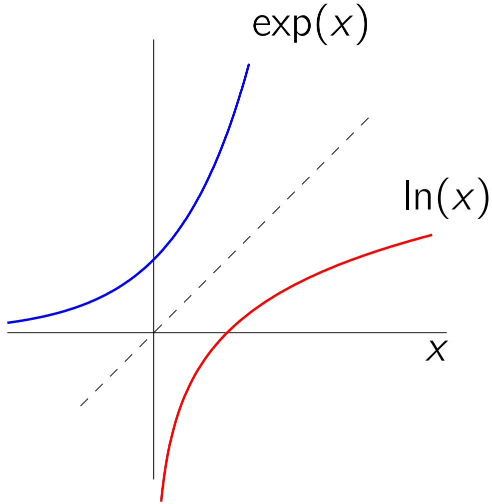


Funktionswerte & Eigenschaften

- $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$
- $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$

Exponentialfunktion und Logarithmus

- $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- exp ist streng monoton wachsend (smw) $\Rightarrow$ umkehrbar
- $\ln = \exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

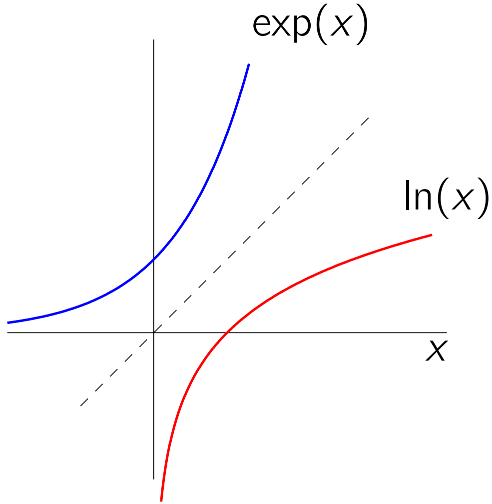


Funktionswerte & Eigenschaften

- $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$
- exp ist stetig
- $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$
- ln ist stetig (Umkehrfkt. einer stetigen Fkt)

Exponentialfunktion und Logarithmus

- $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- exp ist streng monoton wachsend (smw)
  $\Rightarrow$ umkehrbar
- $\ln = \exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$



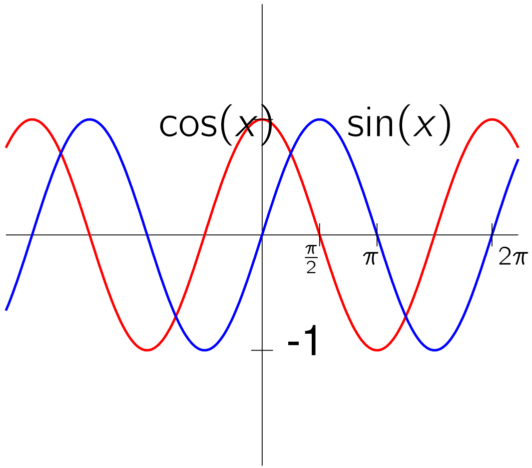
Funktionswerte & Eigenschaften

- $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$
- $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$
- exp ist stetig

- $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$
- $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$
- ln ist stetig (Umkehrfkt. einer stetigen Fkt)
- ln ist smw und bijektiv

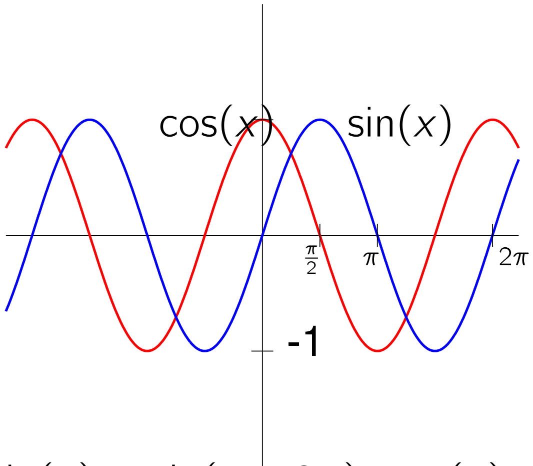
Trigonometrische Funktionen

Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$



Trigonometrische Funktionen

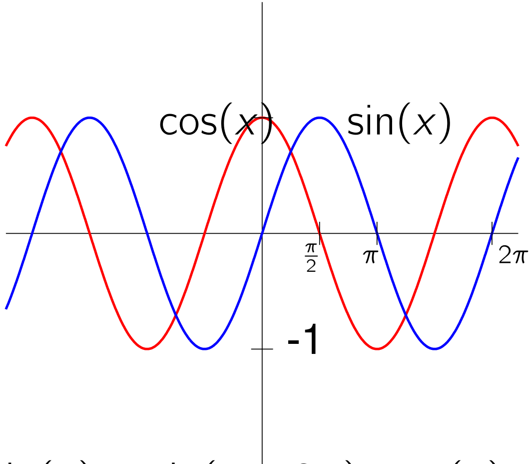
Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$



- Periode 2π: $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$, $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$

Trigonometrische Funktionen

Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

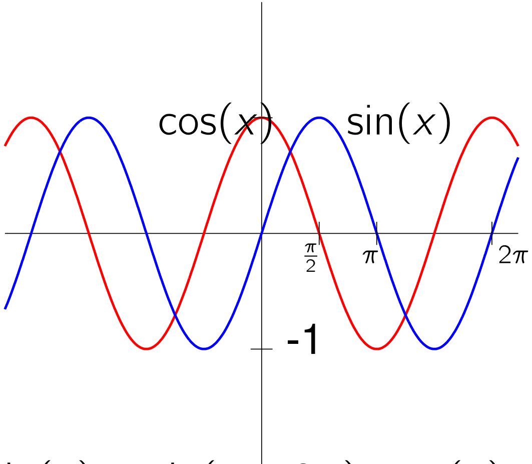


- **Periode** 2π: $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$, $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$
- **Nullstellen**:

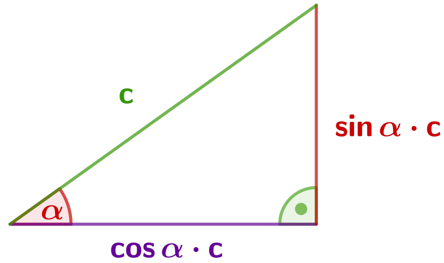
$$\sin(x) = 0 \quad \text{für } x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos(x) = 0 \quad \text{für } x = k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}.$$

Trigonometrische Funktionen

Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$



Anwendung:



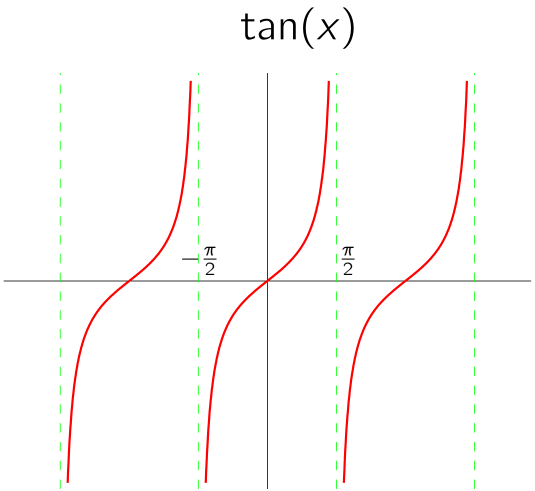
- Periode 2π: $\sin(x) = \sin(x + 2\pi),\ \cos(x) = \cos(x + 2\pi)$
- Nullstellen:

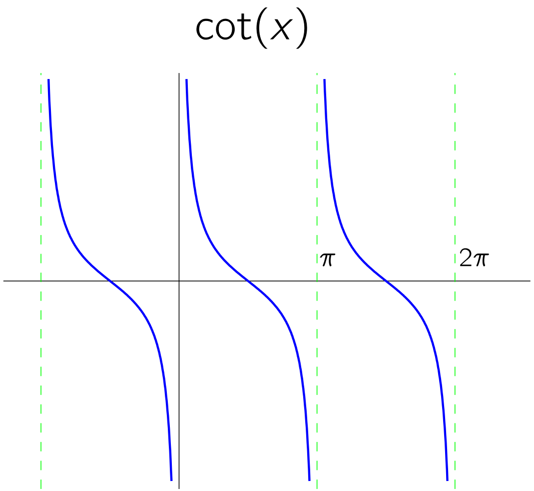
$$\sin(x) = 0 \quad \text{für } x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos(x) = 0 \quad \text{für } x = k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}.$$

Tangens und Kotangens

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \tan : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad \cot : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}.$$





Eigenschaften und Rechenregeln

1. $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Eigenschaften und Rechenregeln

1. $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.
2. Wertebereich: $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$.

Eigenschaften und Rechenregeln

1. $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.
2. Wertebereich: $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$.
3. Symmetrie

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{(gerade Funktion)},\\ \sin(-x) &= -\sin(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{(ungerade Funktion)}. \end{aligned}$$

Eigenschaften und Rechenregeln

1. $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.
2. Wertebereich: $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$.
3. Symmetrie

$$
\begin{aligned}
\cos(-x) &= \cos(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{(gerade Funktion)},\\
\sin(-x) &= -\sin(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{(ungerade Funktion)}.
\end{aligned}
$$

4. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Eigenschaften und Rechenregeln

1. $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.
2. Wertebereich: $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$.
3. Symmetrie

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{(gerade Funktion)}, \\ \sin(-x) &= -\sin(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{(ungerade Funktion)}. \end{aligned}$$

4. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
5. Additionstheoreme

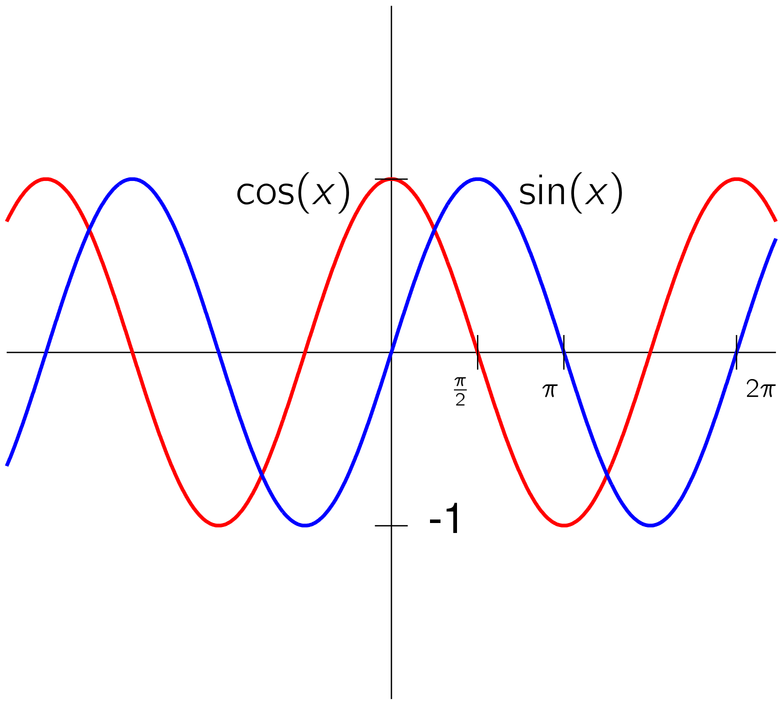
$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y) \quad , \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y) \quad . \end{aligned}$$

Werte von Sinus und Kosinus

Phasenverschiebung

$\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$

$\sin(0)$	0	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	$\cos(0)$



Umkehrfunktionen Arcus-Sinus, Arcus-Kosinus

- Sinus ist auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wachsend, d.h. umkehrbar

$$\begin{aligned} \sin : [-\pi/2, \pi/2] &\to [-1, 1] \\ \arcsin := \sin^{-1} : [-1, 1] &\to [-\pi/2, \pi/2] \end{aligned}$$

Umkehrfunktionen Arcus-Sinus, Arcus-Kosinus

- Sinus ist auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wachsend, d.h. umkehrbar

$$\begin{aligned} \sin : [-\pi/2, \pi/2] &\to [-1, 1] \\ \arcsin := \sin^{-1} : [-1, 1] &\to [-\pi/2, \pi/2] \end{aligned}$$

- Kosinus ist auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend, d.h. umkehrbar

$$\begin{aligned} \cos : [0, \pi] &\to [-1, 1] \\ \arccos := \cos^{-1} : [-1, 1] &\to [0, \pi] \end{aligned}$$

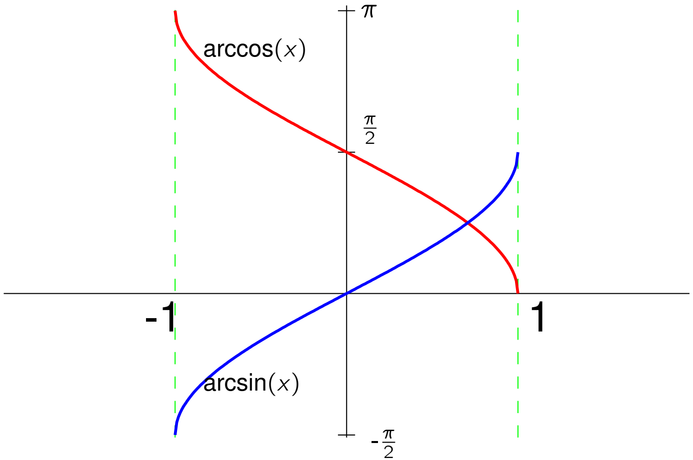
Umkehrfunktionen Arcus-Sinus, Arcus-Kosinus

- Sinus ist auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wachsend, d.h. umkehrbar

$$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$$
$$\arcsin := \sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

- Kosinus ist auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend, d.h. umkehrbar

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$
$$\arccos := \cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$



Umkehrfunktionen Arcus-Sinus, Arcus-Kosinus

- Sinus ist auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wachsend, d.h. umkehrbar

$$\begin{aligned} \sin : [-\pi/2, \pi/2] &\to [-1, 1] \\ \arcsin := \sin^{-1} : [-1, 1] &\to [-\pi/2, \pi/2] \end{aligned}$$

- Kosinus ist auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend, d.h. umkehrbar

$$\begin{aligned} \cos : [0, \pi] &\to [-1, 1] \\ \arccos := \cos^{-1} : [-1, 1] &\to [0, \pi] \end{aligned}$$

- Genauso:
  Umkehrfunktionen arctan, arccot von $\tan, \cot$