Universität Konstanz

# Mathematik I

## für Chemie, Life Science und Nanoscience

**Vorlesung 13: Polar- und Kugelkoordinaten**

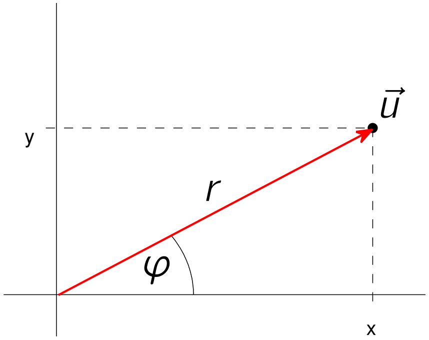
Dr. Stefan Frei, 16.12.19

# Polarkoordinaten

Darstellung $(r, \phi))$ eines Vektors $(x, y)$ (kartesische Koordinaten) mithilfe

- seiner Länge $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- des Winkels $\phi \in (-\pi, \pi]$ zur $x$-Achse

Polarkoordinaten $(r, \varphi)$




- Jeder Vektor $\vec{u} \neq 0$ hat eine eindeutige Darstellung in Polarkoordinaten $(r, \phi)$

# Polarkoordinaten: Umrechnung

- $(r, \phi) \to (x, y)$:

$$x = r\cos(\phi)$$
$$y = r\sin(\phi).$$

# Polarkoordinaten: Umrechnung

- $(r, \phi) \to (x, y)$:

$$x = r\cos(\phi)$$
$$y = r\sin(\phi).$$

- $(x, y) \to (r, \phi)$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right), & y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & y < 0. \end{cases}$$

# Polarkoordinaten: Umrechnung

- $(r, \phi) \to (x, y)$:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos(\phi)\\
y &= r\sin(\phi).
\end{aligned}
$$

- $(x, y) \to (r, \phi)$:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2}\\
\phi &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right), & y \geq 0,\\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & y < 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Fallunterscheidung ist notwendig, weil

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

nur auf positive Winkel abbildet (cos ist nicht injektiv auf größerem Intervall)

# Beispiele

1. $\vec{u} = (1, 1)$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi = \pm \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$$

# Beispiele

1. $\vec{u} = (1, 1)$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi = \pm \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \overset{y>0}{=} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

# Beispiele

1. $\vec{u} = (1, 1)$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi = \pm \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \overset{y>0}{=} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2. $\vec{v} = (1, -\sqrt{3})$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

$$\phi = \pm \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$$

# Beispiele

1. $\vec{u} = (1, 1)$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi = \pm \operatorname{arccos}\left(\frac{x}{r}\right) \overset{y>0}{=} \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2. $\vec{v} = (1, -\sqrt{3})$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

$$\phi = \pm \operatorname{arccos}\left(\frac{x}{r}\right) \overset{y<0}{=} -\operatorname{arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

# Beispiele

1. $\vec{u} = (1, 1)$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi = \pm \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \overset{y>0}{=} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2. $\vec{v} = (1, -\sqrt{3})$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

$$\phi = \pm \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \overset{y<0}{=} -\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

3. $(r, \phi) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

## Beispiele

1. $\vec{u} = (1, 1)$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi = \pm \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \overset{y>0}{=} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2. $\vec{v} = (1, -\sqrt{3})$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

$$\phi = \pm \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \overset{y<0}{=} -\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

3. $(r, \phi) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

$$x = r\cos(\phi) = \frac{1}{2}\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{=-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad y = r\sin(\phi) = \frac{1}{2}\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

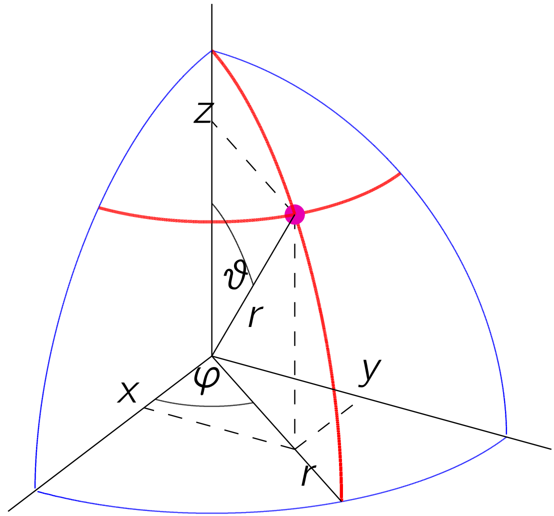
# Kugelkoordinaten

Sei $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in kartesischen Koordinaten

Kugelkoordinaten $(r, \psi, \phi)$, wobei

- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Länge von $\vec{u}$
- $\phi \in (-\pi, \pi]$ Winkel zur $x$-Achse ("Längenkreise")

*Kugelkoordinaten*



# Kugelkoordinaten

Sei $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in kartesischen Koordinaten

Kugelkoordinaten $(r, \psi, \phi)$, wobei

- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Länge von $\vec{u}$
- $\phi \in (-\pi, \pi]$ Winkel zur $x$-Achse
  ("Längenkreise")
- $\psi \in [0, \pi]$ Winkel zur $z$-Achse ("Breitenkreise")

  ($\psi = 0$ entspricht "Nordpol", $\psi = \pi$ entspricht Südpol)

*Kugelkoordinaten*