Universität Konstanz

Mathematik I

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 15: Komplexe Zahlen

Dr. Stefan Frei, 09.01.20

Komplexe Zahlen

- Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$
- **Motivation**: In $\mathbb{R}$ gibt es keine Zahl a mit $a^2 = x < 0$, d.h. die Wurzel $\sqrt{x}$ ist nicht definiert für $x < 0$

Komplexe Zahlen

- Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$
- **Motivation**: In $\mathbb{R}$ gibt es keine Zahl a mit $a^2 = x < 0$, d.h. die Wurzel $\sqrt{x}$ ist nicht definiert für $x < 0$
- Wir definieren $i = \sqrt{-1}$. Es gilt dann allgemein $\sqrt{-x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{x} \cdot i$

Komplexe Zahlen

- Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$
- **Motivation**: In $\mathbb{R}$ gibt es keine Zahl a mit $a^2 = x < 0$, d.h. die Wurzel $\sqrt{x}$ ist nicht definiert für $x < 0$
- Wir definieren $i = \sqrt{-1}$. Es gilt dann allgemein $\sqrt{-x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{x} \cdot i$
- Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} := \{z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

- $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$

Grundoperationen

Sei $w = a + bi$, $z = c + di$:

- Addition

$$w + z = (a + bi) + (c + di) = \underbrace{(a + c)}_{\mathrm{Re}(w+z)} + \underbrace{(b + d)}_{\mathrm{Im}(w+z)} i$$

Grundoperationen

Sei $w = a + bi$, $z = c + di$:

- Addition

$$w + z = (a + bi) + (c + di) = \underbrace{(a + c)}_{\mathrm{Re}(w+z)} + \underbrace{(b + d)}_{\mathrm{Im}(w+z)} i$$

- Subtraktion

$$w - z = (a + bi) - (c + di) = \underbrace{(a - c)}_{\mathrm{Re}(w-z)} + \underbrace{(b - d)}_{\mathrm{Im}(w-z)} i$$

Grundoperationen

Sei $w = a + bi$, $z = c + di$:

- Addition

$$w + z = (a + bi) + (c + di) = \underbrace{(a + c)}_{\mathrm{Re}(w+z)} + \underbrace{(b + d)}_{\mathrm{Im}(w+z)} i$$

- Subtraktion

$$w - z = (a + bi) - (c + di) = \underbrace{(a - c)}_{\mathrm{Re}(w-z)} + \underbrace{(b - d)}_{\mathrm{Im}(w-z)} i$$

- Multiplikation

$$w \cdot z = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bd \underbrace{i^2}_{=-1} = \underbrace{(ac - bd)}_{\mathrm{Re}(w \cdot z)} + \underbrace{(ad + bc)}_{\mathrm{Im}(w \cdot z)} i$$

Division

- $\overline{z} := a - bi$ komplex konjugierte Zahl zu $z = a + bi$
- Betrag $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$
- Es gilt $z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ (reelle Zahl)

Division

- $\overline{z} := a - bi$ komplex konjugierte Zahl zu $z = a + bi$
- Betrag $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$
- Es gilt $z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ (reelle Zahl)

Für $w = a + bi$, $z = c + di$

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{w \cdot \overline{z}}{|z|^2} =$$

Division

- $\overline{z} := a - bi$ komplex konjugierte Zahl zu $z = a + bi$
- Betrag $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$
- Es gilt $z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ (reelle Zahl)

Für $w = a + bi$, $z = c + di$

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{w \cdot \overline{z}}{|z|^2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} =$$

Division

- $\overline{z} := a - bi$ komplex konjugierte Zahl zu $z = a + bi$
- Betrag $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$
- Es gilt $z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ (reelle Zahl)

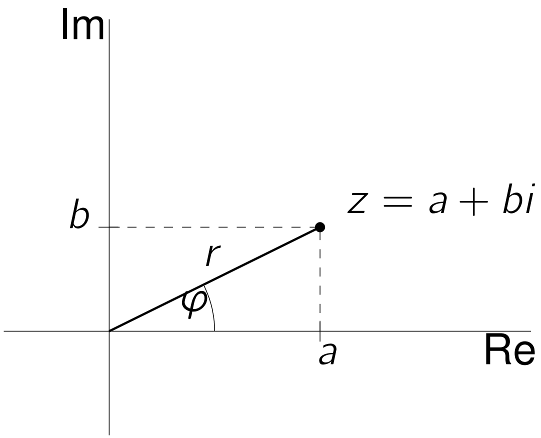
Für $w = a + bi$, $z = c + di$

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{w \cdot \overline{z}}{|z|^2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

$$= \underbrace{\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}}_{=\mathrm{Re}(\frac{w}{z})} + \underbrace{\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}}_{=\mathrm{Im}(\frac{w}{z})} i$$

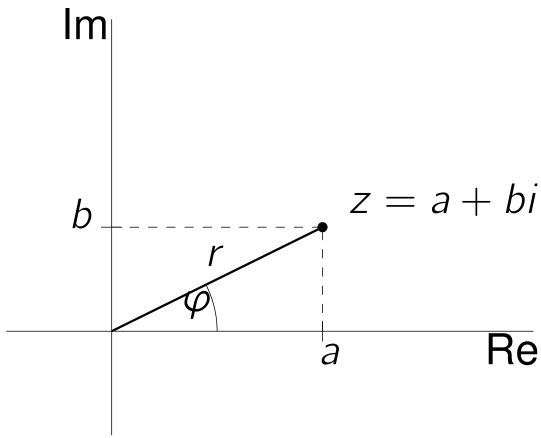
Darstellungen einer komplexen Zahl

- Kartes. Koordinaten (a, b)
- Polarkoordinaten (r, ϕ)



Darstellungen einer komplexen Zahl

- Kartes. Koordinaten (a, b)
- Polarkoordinaten (r, ϕ)



- Algebraische Darstellung: $z = a + bi$
- Exponentielle Darstellung: $z = r \cdot \exp(i\phi)$
- Trigonometr. Darstellung: $z = r(\cos(\phi) + i\ \sin(\phi))$