Universität Konstanz

Mathematik I

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 18: Differentiation im $\mathbb{R}^n$

Dr. Stefan Frei, 23.01.20

Klausurtermin

- Alter Termin: Mo, 02.03.20, 14:30-16:30
- Überschneidung mit der Klausur *Lineare Algebra* für LA Mathe-Chemie

Alternativtermine

- Do, 27.02.20, 14:30-16:30 (4 Konflikte)
- Di, 03.03.20, 14:30-16:30 (3 Konflikte)
- Mi, 04.03.20, 17:00-19:00 (1 Konflikt)

Neuer Termin: Mi, 04.03.20, 17:00-19:00 !

Infos zur Klausur

- 90 min Zeit, 15 min vorher da sein
- **Einziges Hilfsmittel**: Handbeschriebenes DIN A4 Blatt (Vorder- und Rückseite), keine Kopien, keine Verkleinerungen
- Kein Taschenrechner, etc, Handys und Smartwatches in Taschen
- Ca. 45 Punkte, 40% zum Bestehen notwendig
- Bei Bestehen evtl. Anrechnen von bis zu 5 Bonuspunkten aus den Übungen

Vorbereitung

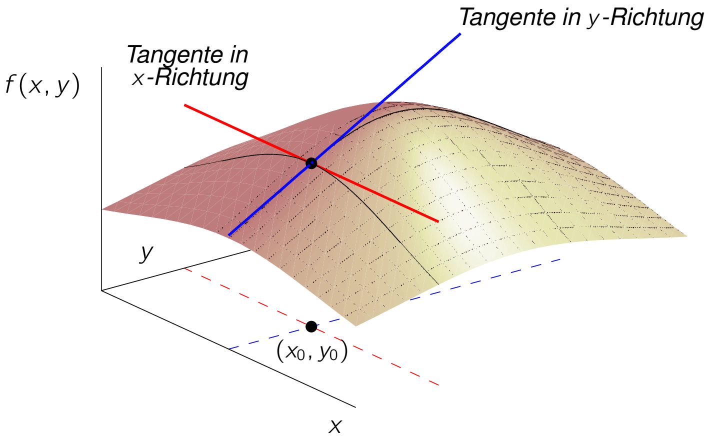
- Altklausuren Eberhard Luik online (aber: Auch andere Themen können drankommen!)
- Übungsaufgaben

Partielle Ableitung

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist partiell differenzierbar nach x_j in $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, wenn

$$g_j(t) := f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

differenzierbar ist.



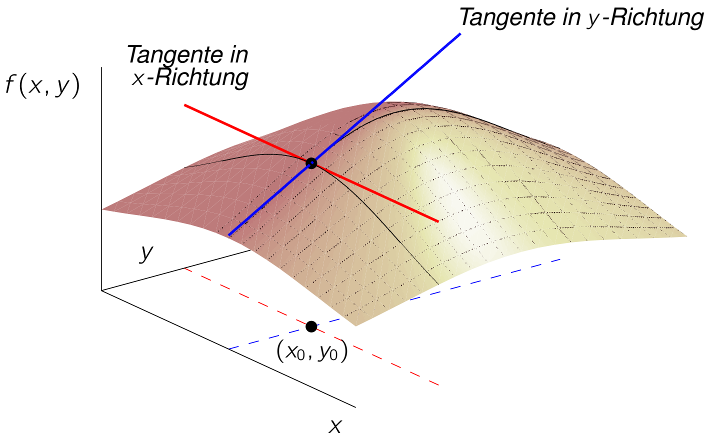
- Partielle Ableitungen nach x und y sind Steigungen der Tangenten in x- bzw. y-Richtung

Partielle Ableitung

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist partiell differenzierbar nach x_j in $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, wenn

$$g_j(t) := f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

differenzierbar ist.



- Partielle Ableitungen nach x und y sind Steigungen der Tangenten in x- bzw. y-Richtung

- Gradient von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: Vektor der partiellen Ableitungen

$$\nabla f := (\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \ldots, \partial_{x_n} f)$$

Ableitung einer Kurve

Kurve $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

$$r(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Die Ableitung berechnet sich durch Ableiten jeder einzelnen Komponente

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

Ableitung eines Vektorfeldes

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\,, \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Die Ableitung berechnet sich wieder durch Ableiten jeder einzelnen Komponente von F

$$DF(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \qquad .$$

Ableitung eines Vektorfeldes

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \,, \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Die Ableitung berechnet sich wieder durch Ableiten jeder einzelnen Komponente von F

$$DF(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad .$$

DF heißt Jacobi-Matrix oder Funktionalmatrix und besteht aus $n \cdot m$ partiellen Ableitungen.

Ableitung eines Vektorfeldes

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \,, \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Die Ableitung berechnet sich wieder durch Ableiten jeder einzelnen Komponente von F

$$DF(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad .$$

DF heißt Jacobi-Matrix oder Funktionalmatrix und besteht aus $n \cdot m$ partiellen Ableitungen.

(Nicht zu verwechseln mit der *Hesse-Matrix* $\nabla^2 f$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

Beispiel: Ableitung eines Vektorfeldes

- Vektorfeld

$$F:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ \exp(x+2y) \end{pmatrix}$$

Beispiel: Ableitung eines Vektorfeldes

- Vektorfeld

$$F:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ \exp(x+2y) \end{pmatrix}$$

- Funktionalmatrix

$$DF(x,y) \ = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ \exp(x+2y) & 2\exp(x+2y) \end{pmatrix},$$

- z.B. im Punkt $(x,y) = (1,0)$

Beispiel: Ableitung eines Vektorfeldes

- Vektorfeld

$$F:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ \exp(x+2y) \end{pmatrix}$$

- Funktionalmatrix

$$DF(x,y) \ = \ \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ \exp(x+2y) & 2\exp(x+2y) \end{pmatrix},$$

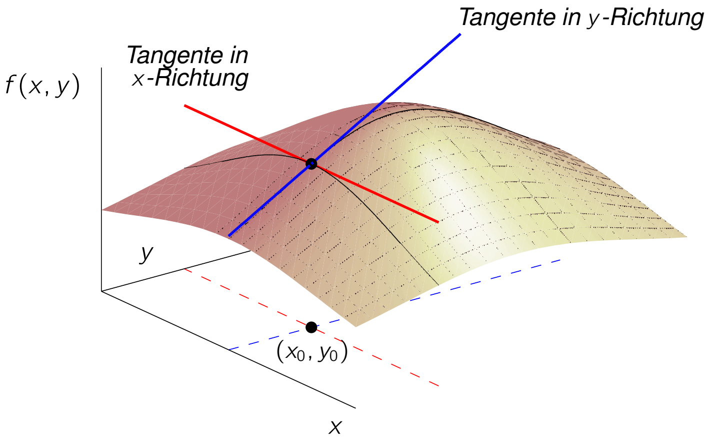
- z.B. im Punkt $(x,y) = (1,0)$

$$DF(1,0) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e & 2e \end{pmatrix} \quad .$$

Richtungsableitungen

Betrachte wieder eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

partielle Ableitungen

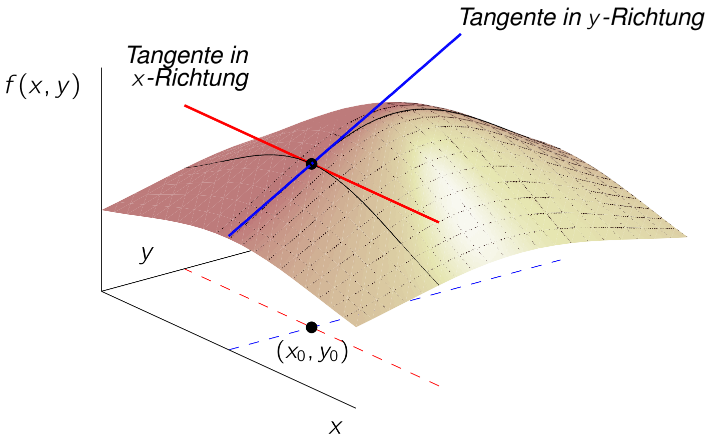


- Partielle Ableitung nach x: Steigung der Tangenten in Richtung $\vec{v} = (1, 0)$ (x-Richtung)
- Partielle Ableitung nach y: Steigung der Tangenten in Richtung $\vec{v} = (0, 1)$ (y-Richtung)

Richtungsableitungen

Betrachte wieder eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

partielle Ableitungen



- Partielle Ableitung nach x: Steigung der Tangenten in Richtung $\vec{v} = (1, 0)$ (x-Richtung)
- Partielle Ableitung nach y: Steigung der Tangenten in Richtung $\vec{v} = (0, 1)$ (y-Richtung)
- Richtungsableitung in Richtung $\vec{v} = (x, y)$: Tangente in Richtung $\vec{v}$