Universität Konstanz

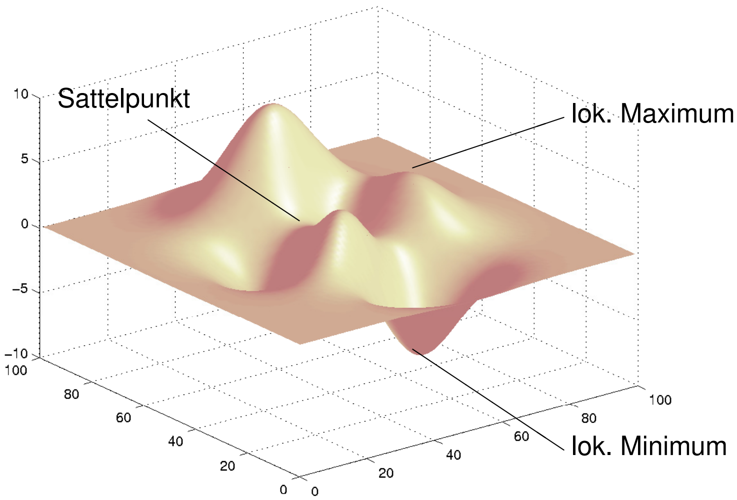
Mathematik I

für Chemie, Life Science und Nanoscience

Vorlesung 19: Lokale Extrema im $\mathbb{R}^n$

Dr. Stefan Frei, 27.01.20

Lokale Extrema im $\mathbb{R}^n$

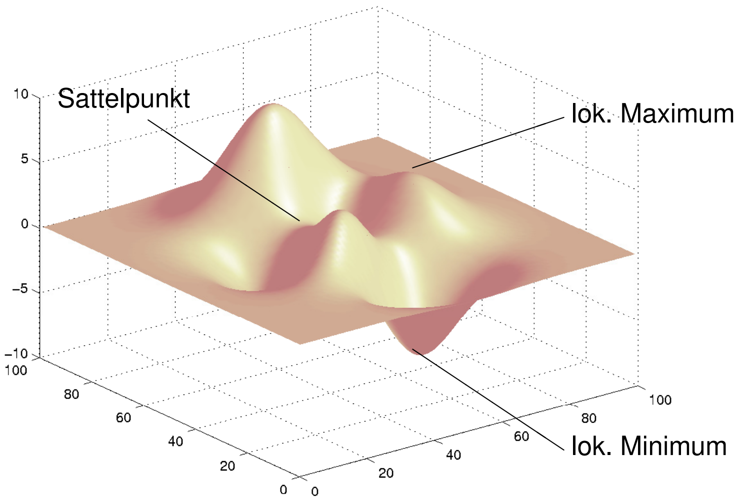


- $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt lokales Maximum (Minimum) von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wenn

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \quad (f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}))$$

für alle x in einer Umgebung U von $\vec{x}_0$.

Lokale Extrema im $\mathbb{R}^n$



- $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt lokales Maximum (Minimum) von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wenn

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \quad (f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}))$$

für alle x in einer Umgebung U von $\vec{x}_0$.

- $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ist Sattelpunkt, wenn in einer Richtung ein lokales Minimum und in einer anderen ein lokales Maximum vorliegt.

Notwendige Bedingung 1. Ordnung

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar

Notwendige Bedingung 1.Ordnung

Ist $\vec{z}_0 = (x_0, y_0)$ ein lokales Extremum, dann gilt

- $\vec{z}_0$ ist lok. Extremum in x-Richtung, d.h.
$$\partial_x f(x_0, y_0) = 0$$
- $\vec{z}_0$ ist lok. Extremum in y-Richtung, d.h.
$$\partial_y f(x_0, y_0) = 0$$

Notwendige Bedingung 1. Ordnung

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar

Notwendige Bedingung 1.Ordnung

Ist $\vec{z}_0 = (x_0, y_0)$ ein lokales Extremum, dann gilt

- $\vec{z}_0$ ist lok. Extremum in x-Richtung, d.h.
$$\partial_x f(x_0, y_0) = 0$$
- $\vec{z}_0$ ist lok. Extremum in y-Richtung, d.h.
$$\partial_y f(x_0, y_0) = 0$$

- Zusammengefasst: $\nabla f(x_0, y_0) = 0$
- Wir sprechen dann von einem stationären Punkt

Hinreichende Bedingung 2. Ordnung

- Zur Erinnerung in 1d:
  - $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ist lokales Minimum
  - $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ist lokales Maximum
  - $f''(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ lok. Max., lok. Min. oder Sattelpunkt

Hinreichende Bedingung 2. Ordnung

- Zur Erinnerung in 1d:
  - $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ist lokales Minimum
  - $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ist lokales Maximum
  - $f''(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ lok. Max., lok. Min. oder Sattelpunkt

- Im $\mathbb{R}^2$ Bedingungen an die Hessematrix

$$\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x_0, y_0) & \partial_{xy} f(x_0, y_0) \\ \partial_{xy} f(x_0, y_0) & \partial_{yy} f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$